Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

# Évariste Galois a jeho teorie

## Évariste Galois and His Theory

Lukáš Richter

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Évariste Galois a jeho teorie vypracoval pod vedením vedoucího bakalářské práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Souhlasím s trvalým uložením elektronické verze mé práce v databázi mezi-univerzitního projektu Theses.cz za účelem soustavné kontroly podobnosti kvalifikačních prací.

V Praze dne 27. června 2014.

.........................................................

Lukáš Richter

Děkuji prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, Dr. za jeho vstřícný přístup při psaní této práce a poskytnuté materiály a rady.

**NÁZEV:**

Évariste Galois a jeho teorie

**AUTOR:**

Lukáš Richter

**KATEDRA:**

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

**VEDOUCÍ PRÁCE:**

prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

**ABSTRAKT:**

První část bakalářské práce pojednává o životě významného francouzského matematika 19. století Évarista Galoise, zakladatele moderní algebry. Zaměřuje se na léta jeho školních docházky, setkání s matematikou, neúspěšné přijímací zkoušky, vyloučení ze školy, jeho matematická díla a neblahé zkušenosti s francouzskou Akademií věd. V průběhu života měl dvakrát problémy se zákonem, byl souzen a jednou uvězněn. Na sklonku svého krátkého života se nešťastně zamiloval a v souvislosti s tím zemřel v souboji.

Druhá část se zabývá řešením polynomických rovnic prvního až čtvrtého stupně pomocí vzorců, které byly známy již za Galoisova života. Každý z uvedených vzorců je srozumitelně odvozen metodou vhodnou i pro středoškoláky a jeho použití předvedeno na příkladu.

Ve třetí části jsou uvedeny základy Galoisovy teorie a je ukázána neřešitelnost polynomických rovnic stupně nejméně 5. Některé poučky jsou představeny na příkladech.

**KLÍČOVÁ SLOVA:**

Évariste Galois, polynomické rovnice, rozšiřování číselných těles, grupy automorfismů, Galoisova teorie

**TITLE:**

Évariste Galois and His Theory

**AUTHOR:**

Lukáš Richter

**DEPARTMENT:**

The Department of Mathematics and Teaching of Mathematics

**SUPERVISOR:**

prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

**ABSTRACT:**

The first part of my thesis deals with the life of the significant French mathematician of the 19th century, Évariste Galois, the founder of modern algebra. It is focused on his school years, meetings with mathematics, unsuccessful entrance exams to university, expulsion from school, his mathematic works and his bad experiences with French Academy of Science. He had difficulties with law during his life twice, he was judged and imprisoned. At the end of his short life he fell in love unhappily and consequently was killed in a duel.

The second part is devoted to the solution of polynomial equations of the first degree up to the fourth degree by the algebraic patters already known at the times of Galois. Each of the formula is derived by the method suitable even for the students of secondary schools and its usage is illustrated on the example.

The third part contains the basics of the Galois Theory and the insolubility of polynomial equations of at least fifth degree is demonstrated. Some of the statements are introduced on examples.

**KEYWORDS:**

Évariste Galois, polynomial equations, field extensions, automorphism groups, Galois Theory

# Obsah

# Úvod

Zaměřit svou bakalářskou práci na řešení rovnic jsem se rozhodl proto, že se jedná o mou oblíbenou disciplínu z algebry. Zaujalo mě téma řešitelnosti, respektive neřešitelnosti, obecné rovnice pátého stupně. Tímto se zabývali mnozí matematici, zejména Niels Henrik Abel, nicméně jednoznačnou odpověď podal v 19. století francouzský matematik Évariste Galois. Ten položil základy nové disciplíny, která se zabývá zkoumáním jednotlivých algebraických struktur. Do té doby bylo hlavní úlohou algebry řešení rovnic.

Na začátku své bakalářské práce se budu snažit obsáhnout životopis zmíněného významného francouzského matematika. U zásadnějších životních situací se pokusím zjistit i nějaké podrobnosti, jak tyto probíhaly, jaké byly jejich okolnosti a podobně.

V další části práce se zaměřím na řešení polynomických rovnic pomocí vzorečků, což lze pouze u rovnic nejvýše čtvrtého stupně. Zaměřím se na odvození příslušných vzorců, které by bylo možno použít i při výuce matematiky na střední škole, v případě rovnic kubických a kvartických například v nějakém semináři nebo jako rozšiřující učivo.

Nakonec představím samotnou Galoisovu teorii, uvedu základní definice a věty, které jsou zapotřebí, a pokusím teorii přiblížit na příkladech.

Cílem práce je tedy dozvědět se nejen něco o samotném matematikovi a jeho vědecké činnosti, ale i o řešitelnosti rovnic pomocí vzorců.

# 1 Život Évarista Galoise

Évariste Galois se narodil **25. října 1811** ve francouzském městě **Bourg-la-Reine** nedaleko Paříže (v současné době již pařížské předměstí). Měl dva sourozence: mladší bratr se jmenoval **Alfred** a starší sestra **Nathalie-Théodore**. Jeho otec **Nicolas-Gabriel Galois** tehdy zastával funkci ředitele chlapecké školy v Bourg-la-Reine, později se stal tamním starostou. Byl to veselý vzdělaný člověk, který se volném čase zabýval skládáním vtipných veršů či vymýšlením zábavných her. Évaristova matka **Adéläide Marie Demanteová** měla dobré vzdělání v klasických jazycích. Byla dcerou právníka působícího na pařížské právnické fakultě. (Livio 2008, str. 116 – 118, 138, 147)

## 1.1 Školní léta

Mladého Évarista nejprve vzdělávala doma jeho matka, která ho měla čemu naučit, a to až do jeho dvanácti let. V říjnu 1823 nastoupil na pařížskou internátní školu **Lycée Louis-le-Grand** (Lyceum Ludvíka Velikého), která měla vynikající akademickou pověst. Složení studentů bylo názorově velmi rozmanité, čímž bylo zaděláno na časté problémy. Panoval tam přísný program, který poslušnosti nepřidal – každá minuta v rozmezí od 5:30 do 20:30 byla podrobně rozplánovaná. Strava byla mimořádně chudá, podmínky mizerné, navíc po zemi často běhaly krysy. Není divu, že takové prostředí Galoisovi, zvyklému na úplně jiné podmínky, příliš dobře nedělalo. (Livio 2008, str. 118 – 119)

### 1.1.1 Vzpoura v lyceu Ludvíka Velikého

Krátce před Évaristovým nástupem do školy tam byl dosazen nový ředitel **Nicolas Berthot**. Studenti měli podezření, že je to první krok k navrácení ústavu zpět jezuitskému řádu, jemuž dříve patřil, a tak se proti tomu rozhodli bojovat. Mimo jiné chtěli protestovat také proti špatné stravě a nevhodnému oblékání a reprezentaci školy novým ředitelem.

Vypuknutí puče bylo naplánováno na šestou hodinu večerní dne 27. ledna 1824. Vedení školy však mělo od jednoho z otců studentů o plánované akci povědomí a nechalo během dne všechny její vůdce postupně odstranit z výuky – jednalo se o čtyřicet nejlepších žáků lycea. Mezi ostatními zavládla nejistota, protože nevěděli, jak mají večer postupovat. V inkriminovaný čas se dokonce ani nerozezněly školní zvony. V mladém Galoisovi začal růst hněv a byl to právě on, kdo s výtržnostmi začal – jako první mrštil slovníkem proti katedře. Tímto impulsem se ostatní spolužáci probrali a jali se vrhat knihy. Jejich počínání ukončil vstup zástupce ředitele do místnosti. Všichni nakonec naštěstí vyvázli bez trestu.

Následujícího dne se konala tradiční hostina při příležitosti svátku Karla Velikého. Pro účast na slavnosti byli pečlivě vybíráni ti nejlepší žáci ústavu. Tentokrát to však bylo nejzvláštnější v celé historii – vybralo se celkem 115 žáků, avšak hned 40 z nich bylo předchozího dne vyloučeno. Když došlo na šampaňské, pronesl ředitel Berthot přípitek na zdraví krále Ludvíka XVIII., ovšem nikdo ze studentů se ho nezúčastnil. Rovněž druhý přípitek, na zdraví pana ředitele, se shledal se stejnou odezvou. Reakce na chování studentů byla velmi rázná – všichni zúčastnění byli z ústavu vyloučeni. (Infeld 1952, str. 24 – 44)

Pochybným vyloučením sto patnácti nejlepších žáků lycea si také ředitel Berthot zpečetil svůj osud – z postu byl odstraněn a na jeho místo nastoupil **Pierre-Laurent Laborie**. (Infeld 1952, str. 50)

### 1.1.2 Setkání s matematikou

I přes přísné podmínky na Lyceu Ludvíka Velikého byl Évariste v prvních letech studia úspěšný. Díky skvělé průpravě od matky vynikal v překladech z řečtiny a latinském projevu. Na podzim roku 1826 se mu však nedařilo v rétorice. Byl sice pilný a učitelem za to náležitě oceňovaný, nicméně nový ředitel zastával jiný názor. Dle jeho soudu byl Évariste příliš mladý na tak pokročilý kurz. Doporučil mu proto opakovat třetí ročník, aby se naučil lépe myslet a uzrál po stránce charakterové. S tímto plánem se Galois v žádném případě neztotožňoval, viděl se totiž ze školy co nejdříve pryč, ovšem tlakem ředitelových argumentů byl k opakování třídy přemluven. Později se ukázalo, že to byl správný krok.

Aby po opětovném nástupu do stejného ročníku předešel nudě při probírání již známého učiva, přihlásil se Évariste na volitelný předmět, jímž byla dodnes neoblíbená matematika. Na vyučování, které probíhalo čtyřikrát týdně, docházelo jenom pár žáků. V době, kdy se přidal Galois, měli jeho noví kolegové probranou již polovinu učebnice **Eléments de géométrie** (Základy geometrie) z roku 1794, jejímž autorem byl slavný matematik **Adrien Marie Legendre**. Tato učebnice skoncovala se starým eukleidovským přístupem a brzy se stala vyhledávanou po celé Evropě. (Infeld 1952, str. 51 – 53; Livio 2008, str. 119 – 120)

Na první hodině si Évariste začal v učebnici listovat. Každou přečtenou poučku si představil a nacházel souvislosti, jak spolu jednotlivě souvisejí. Dokonce se mu dařilo předpovídat, co se dozví na následujících stranách. O důkazech ani nemluvě – každé tvrzení dovedl samostatně dokázat. Po zbytek dne se snažil využít každou volnou chvilku v hodinách i o přestávkách, aby se dozvěděl co nejvíc dalších vědomostí. Následujícího dne opět v četbě pokračoval a podařilo se mu ji dokončit. Za dva dny obsáhnul celé dílo, které se ve vyučování probírá dva roky!

Učitelem, který vedl kurz matematiky, byl **Hippolyte Vernier**. Jeho výuka probíhala velmi nudným způsobem. Mluvil monotónním hlasem, vzorce i jejich důkazy slovo od slova předčítal z Legendreovy knihy, všechno několikrát opakoval a zapisoval na tabuli. Žáci si poznámky opisovali do sešitů a při vyvolání odpovídali přesně učitelovými slovy. Výuka matematiky tedy probíhala podobně, jako kdyby se učilo nějakému jazyku – žáci se jí nesnažili porozumět, jen tupě opakovali. (Infeld 1952, str. 53 – 56)

Když došlo na první Évaristovo zkoušení z matematiky, zavládlo ve třídě neobvyklé ticho. Někteří spolužáci, vzpomínajíce na tituly knih, které Évariste četl, očekávali, že přivede profesora Verniera do úzkých, jiní očekávali, že Évariste dostane na frak od profesora, avšak samotný Galois pomýšlel na to, že bude muset hrát divadlo před celou třídou a odpovídat na primitivní otázky.

Vernierova otázka se týkala způsobu rozdělení úhlu na poloviny. Takto lehký úkol chápal Évariste jako urážku a hbitě na tabuli narýsoval řešení. Samozřejmě si tím vysloužil od profesora pochvalu. Ten podotkl, že mnozí žáci navštěvující jeho hodiny od začátku, by tento příklad nebyli schopni vyřešit. Potom požádal Galoise, aby vysvětlil, proč jsou vzniklé úhly stejné. Zdůraznil při tom, že v geometrii je vždy potřeba umět nějakou vhodnou metodou dokázat, že je dané tvrzení pravdivé.

Vtom Évariste vyhrknul: „*Cožpak to není samozřejmé?*“ Spolužáci propukli v bouřlivý smích, někteří začali tleskat. Zkoušený se obrátil k tabuli a provedl důkaz za pomoci dvou shodných trojúhelníků, které do nárysu doplnil. To už se profesoru

Vernierovi líbilo daleko víc. Na závěr dal Galoisovi dobrou radu pro další studium: „*Buď pozorný a pracuj víc systematicky.*“ (Infeld 1952, str. 60 – 61)

### 1.1.3 Počátky vědecké práce

Évariste se stal častým návštěvníkem knihovny lycea, kde se daly najít cenné matematické knihy, ovšem mnoho jich tam nebylo. Zásadním dílem byla Lagrangeova kniha **Résolution des équation numériques** (Řešení číselných rovnic), kde se poprvé dozvěděl o algebře. Dočetl se, že problém nalezení všech kořenů rovnice se podařilo rozřešit jen u rovnic lineárních, kvadratických, kubických a kvartických (čtvrtého stupně). U rovnic pátého stupně, tedy kvintických, žádný univerzální postup neexistoval.

Závažnost tohoto problému si Galois plně uvědomoval a považoval ho za stěžejní pro celou algebru. Domníval se, že musí existovat univerzální metoda umožňující řešení algebraických rovnic všech stupňů pomocí odmocnin. Nezáleželo na její obtížnosti, pouze na nalezení důkazu, že to tak lze. Již několik týdnů po přečtení Lagrangeovy publikace, ve věku neuvěřitelných patnácti let, začal formulovat vlastní názory, jak to s řešitelností rovnic je. (Infeld 1952, str. 56 – 60)

Tehdy Évariste poznal, co to znamená tvůrčí práce. Celé dny, ba i noci, ho napadaly nové myšlenky. Studiu matematiky věnoval veškerý čas, dokonce i v čase jídla nebo když psal úlohy z jiných předmětů. Všechno kromě matematiky dělal automaticky a bezmyšlenkovitě. Zkrátka žil jen matematikou. (Infeld 1952, str. 62)

Roku 1828 se Galois otázkou řešitelnosti kvintických rovnic zabýval podrobněji. Sice se mu podařilo najít důkaz platnosti tohoto tvrzení, nicméně později zjistil, že nevycházel ze správných předpokladů. Mnohočetným přezkoušením metody si ověřil, že několikaměsíční bádání bylo zcela bezcenné – žádný významný vědecký objev se konat nebude. To ho však od další práce neodradilo, ba naopak. Už jako sedmnáctiletý si plně uvědomoval, že kýžený úspěch se může dostavit teprve po odvedení pečlivé práce, a to klidně i za několik let.

Hned si však uložil nový cíl – pustil se do hledání kritérií, kdy má algebraická rovnice libovolného stupně řešení s využitím aritmetických operací a odmocnin (pomocí radikálů). Domníval se, že takové kritérium musí pro rovnice pátého a vyššího stupně dát zápornou odpověď. Jedná se o jeden z nejvýznamnějších a nejobtížnějších algebraických problémů vůbec. Galois ho byl schopen formulovat již jako student lycea. Jeho převratné myšlenky měly o sto let později velký vliv na rozvoj matematiky.

Za zmínku stojí, že podobnou otázkou se zabýval už v roce 1823 Nor **Niels Henrik Abel**, starý pouhých jednadvacet let. Tomu se tehdy podařilo najít způsob řešení rovnice pátého stupně, avšak později se ukázalo, že jeho důkaz nebyl zcela přesný a vycházel z chybných předpokladů, a tak, stejně jako Galois, pokračoval v bádání dále, snaže se najít správné řešení. (Infeld 1952, str. 63 – 64)

### 1.1.4 Přijímací zkouška na polytechniku

V červnu 1828, o rok dříve, než by měl, se Évariste pokusil složit přijímací zkoušku na **École Polytéchnique** („pařížská polytechnika“) založené roku 1794 jako přední francouzský ústav pro přípravu pozdějších vědců a inženýrů. (Livio 2008, str. 121)

Profesor Vernier však doporučoval, aby Évariste zůstal v lyceu ještě rok a věnoval se pouze matematice. Jeho znalosti v tomto oboru sice převyšovaly požadavky pro přijímací zkoušku, ale neznal některé drobnosti, na něž se zkoušející s oblibou ptají. Galois se však rozhodl, že na zkoušku půjde, protože další rok v lyceu v žádném případě zůstat nechtěl. (Infeld 1952, str. 65)

U přijímací zkoušky z matematiky byl zkoušejícím profesor **Lefebure de Fourcy**. Vůbec ho nezajímalo, zda uchazeči problematice rozumějí – chtěl po nich, aby vzorce a poučky odříkali pouze tak, jak je to psáno v učebnicích, což je z dnešního pohledu nepřijatelné. Galois považoval za absolutně nesmyslné, že má být zkoušen právě z matematiky, kterou ovládá na tak vysoké úrovni. Na první otázku místo odpovědi zkoušejícího upozornil, že je nesprávně formulovaná. Následující otázky pro něj byly tak jednoduché, že se mu údajně při jejich vyslechnutí sevřelo hrdlo a nebyl ze sebe schopen vypravit ani hlásku. Výsledek zkoušky není třeba zdůrazňovat. (Infeld 1952, str. 66 – 67)

### 1.1.5 Matematická třída

Bohužel se stalo to, čemu se Évariste tolik bránil – nastoupil do dalšího ročníku studia v neoblíbeném Lyceu Ludvíka Velikého. Naštěstí se mohl zapsat do matematické třídy, již vedl profesor **Louis-Paul-Émil Richard**, který se pyšnil pověstí dobrého přednášejícího. (Livio 2008, str. 121)

Náplní hodin bylo prohloubení a rozšíření stávajících vědomostí probráním celé látky od začátku s poukázáním na provázanost a harmoničnost jednotlivých oblastí a myšlenek matematiky. Na první hodině se probíhala historie matematiky – zrod geometrie ve starém Egyptě a její rozvoj v Řecku. Něco takového Évariste dosud neslyšel, a proto naslouchal velmi pečlivě. S nechutí musel doznat, že od nového profesora se může lecčemu naučit. Není to sice velký matematik, k žádnému objevu nedospěl, nicméně této vědě rozumí a umí o ni vzbudit zájem. (Infeld 1952, str. 68 – 70)

Profesor Richard se k žákům vždy choval jako k sobě rovným a pro Galoise se stal zdrojem inspirace – motivoval a podporoval ho ve výzkumech, s nimiž se mu Évariste svěřil. Dokonce si uschoval dvanáct jeho školních sešitů, jež se později dostaly až do knihovny francouzské Akademie věd (**Académie des Sciences**). (Livio 2008, str. 121 – 122)

### 1.1.6 První vědecké vystoupení

V roce 1829 Évariste Galois uveřejnil svou první vědeckou práci **Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques** (Důkaz věty o periodických řetězových zlomcích) v časopise **Annales de mathématique pures et appliquées** (Ročenka čisté a aplikované matematiky) pojednávající o využití řetězových zlomků při řešení kvadratických rovnic, avšak takřka s žádnou odezvou se nesetkala. (Infeld 1952, str. 73; Livio 2008, str. 122)

To byla ovšem pouhá předzvěst geniálního objevu Évarista Galoise. Tehdy bylo známé, že existuje mnoho rovnic pátého stupně, jejichž řešení lze vyjádřit vzorcem s využitím radikálů, nicméně jednoznačný důkaz, že obecnou kvintickou rovnici takto vyřešit nelze, už podal norský matematik Abel, který bohužel 6. dubna 1829 zemřel na tuberkulózu. Po jeho smrti však zůstala nevyřešena otázka, za jakých podmínek je řešení rovnice nejméně pátého stupně vyjádřitelné pomocí radikálů. Odpovědět na ni se povedlo právě Évaristu Galoisovi, který jako první zavedl pojem grupy a na jeho základě vystavěl nové odvětví algebry dnes zvané Galoisova teorie. Klíčovou se stala symetrie mezi jednotlivými kořeny rovnice. (Livio 2008, str. 122)

Na profesora Richarda Galoisovy geniální myšlenky zapůsobily natolik, že podal návrh, aby byl Évariste přijat na pařížskou polytechniku bez přijímací zkoušky, což se nakonec naneštěstí nepodařilo. Přiměl však mladého génia, aby své objevy sepsal formou dvou článků, které by prostřednictvím profesora Cauchyho představil Akademii věd. Obě práce skutečně prezentovány byly, konkrétně 25. května a 1. června 1829. Posudek na ně měli zpracovat již zmíněný **Augustin Louis Cauchy**, tajemník akademie **Joseph Fourier** a matematičtí fyzikové **Claude Navier** a **Siméon Denis Poisson**. Na zasedání 25. ledna 1830, více než půl roku po představení Galoisovy práce, kdy o ní měl Cauchy předložit zprávu, prezentoval samolibě pouze své vlastní matematické objevy a o ničem jiném nehovořil. (Livio 2008, str. 122 – 123)

V červnu 1829 vyhlásila Akademie věd **Grand Prix** (Velkou cenu) za matematiku. Jelikož byl Évariste unaven čekáním na Cauchyho posudek, rozhodl se své dílo s drobnými úpravami sepsat ještě jednou a poslat jako přihlášku do soutěže. To se stalo v únoru 1830; uzávěrka podání přihlášek byla 1. března 1830. Členy posuzovací komise byli matematikové **Adrien-Marie Legendre**, **Siméon Denis Poisson**, **Sylvestre François Lacroix** a **Louis Poinsot**. Z neznámých důvodů si tajemník Akademie věd Fourier vzal spis s sebou domů, kde 16. března 1830 zemřel. Dokument se však v jeho materiálech nikdy nenašel a nemohl se tak dostat ani do rukou porotců. Vítězi soutěže se stali posmrtně Abel a Jacobi. Galoisovo rozčilení nad opětovnou ztrátou rukopisu bylo značné a jeho paranoidním sklonům, že mu chce společnost odepřít jeho zaslouženou slávu v matematickém světě, to rozhodně neulevilo. Ovšem jeho soutěžní práce **O podmínkách řešitelnosti rovnic pomocí radikálů** je od té doby považována za jedno z nejdůležitějších děl v dějinách matematiky. (Livio 2008, str. 123)

## 1.2 Bouřlivé mládí

### 1.2.1 Sebevražda otce

Aby toho nebylo málo, dne 2. července 1829 se rozhodl Évaristův otec spáchat sebevraždu ve svém pařížském bytě nedaleko od synovy školy, protože už nebyl schopen dál nést tlak, jenž byl na něho vytvářen. Úřad starosty města Bourg-la-Reine zastával od roku 1812 a do příchodu nového faráře před dvěma lety se těšil mezi obyvateli úctě a platil za váženou osobu. Kněz starostovým jménem podepsal několik sprostých epigramů a hloupých veršů a ten se útoky zřejmě nedokázal vyrovnat. Pohřeb váženého starosty se konal 5. července 1829 v Bourg-la-Reine. Během obřadu se mezi obyvateli města uskutečnily protesty proti církvi; mnozí se snažili faráři zabránit, aby se zúčastnil obřadu. (Infeld 1952, str. 78 – 86)

### 1.2.2 Druhý pokus o přijetí na polytechniku

Další přijímací zkoušky na pařížskou polytechniku se konaly přibližně měsíc po otcově smrti, konkrétně v pondělí 3. srpna 1829. Évariste měl k otci silný citový vztah, a tudíž jeho rozpoložení po psychické stránce rozhodně nebylo pro konání zkoušky ideální. Zkoušejícím byl **Charles Louis Dinet**, matematik nevalných kvalit; ve srovnání s Galoisem zcela nepochybně. Z historie je známý pouze v souvislosti s touto neslavnou přijímací zkouškou. Nedával těžké otázky, avšak kladl velký důraz na přesné odpovědi.

Dnes už není zcela jasné, co konkrétně se u zkoušky dělo, nicméně Évaristův sklon psát pouze konečné výsledky a mezikroky propočítávat v hlavě nemusel u zkoušejícího vzbudit příliš dobrý dojem. Údajně dostal otázku týkající se teorie aritmetických logaritmů[1], načež zkoušejícího důrazně upozornil, že žádné *aritmetické* logaritmy neexistují. Traduje se rovněž, že z důvodu neschopnosti komise pochopit jeho přístup k matematice, mrštil po examinátorovi mazací houbou, kterou třímal v ruce. (Livio 2008, str. 124 – 125)

### 1.2.3 École Préparatoire

Polytechnika víc než dva pokusy o přijetí nedovolovala, a tak byl Évariste nucen nastoupit studium na École Préparatoire, z jejichž absolventů se stávali vychovatelé a profesoři královských lyceí. Ústav sídlil v budově sousedící s Lyceem Ludvíka Velikého. Přijetí však mělo další háček – vyžadovalo, aby měl Galois splněnu zkoušku jak ve vědách přírodních, tak i humanitních a podrobil se rovněž ústnímu zkoušení. Z důvodu jeho jednostranného zájmu pouze o matematiku pro něj bylo složení zkoušky dosti obtížné. Přes všechny nesnáze byl nakonec přijat na

[1] Dinet tím nejspíše narážel na Gaussovo pojetí z roku 1801.

přírodovědnou větev školy na základě svých výsledků v matematice začátkem roku 1830.

V prostředí nové školy se Galoisovi špatně pracovalo – příliš nápadně připomínalo poměry v Lyceu Ludvíka Velikého. Matematika mu však šla stejně dobře jako jindy. Jeho spolužák **August Chevalier**, který se později stal jeho nejlepším přítelem, ho seznámil se „sainsimonismem“, novým utopickým směrem se socialistickými myšlenkami inspirovaným filozofií hraběte Saint-Simona, jejímž cílem bylo odstranění rozdílů mezi lidmi a založení tzv. Newtonovy rady sestávající z jednadvaceti umělců s matematikem v čele, která má sjednotit všechny národy světa a stát se jejich jakousi duševní vládou. Republikánsky smýšlející Galois však tuto utopii zcela nekompromisně odsoudil.

Téhož roku vyšly Galoisovi tři články ve významném časopise Bulletin de Férusac (Férrusacův bulletin): **Analyse d’un mémoire sur la résolution algébraique des équations** (Pojednání o analýze paměti při algebraickém řešení rovnic), **Sur la résolution des équations numériques** (O řešení číselných rovnic), **Sur la théorie de nombres** (O teorii čísel). Při spoustě prožitého nezdaru se Évaristovi dostalo alespoň nějakého uznání, když se jeho jméno objevilo mezi články předních matematiků té doby. První ze jmenovaných prací byla předzvěstí jeho revoluční teorie o řešení rovnic. (Infeld 1952, str. 97 – 105; Livio 2008, str. 125 – 126)

### 1.2.4 Červencové ordonance

Dne 26. července 1830 vydal král Karel X. takzvané **Ordonance ze Saint-Cloud**, později známé také jako **Červencové ordonance**, jimiž ustanovil následující čtyři body:

- zavedení cenzury a omezení svobody tisku
- úprava volebního práva
- rozpuštění poslanecké sněmovny
- datum konání nových voleb

Byla to reakce na silnou opozici, která proti němu stála už od jeho korunovace v roce 1824. Tímto krokem se panovník snažil vyhnout abdikaci. Protivníky královského rodu Bourbonů byli republikáni, k nimž patřili hlavně dělníci a studenti, a orleanisté.

Tyto skupiny své postoje vyjadřovaly prostřednictvím deníků po řadě **La Tribune** a **Le National**. Cílem orleanistů bylo nahrazení krále vévodou Ludvíkem Filipem, který sice také patřil k Bourbonům, avšak k jejich orleánské větvi.

Následujícího dne vyšly deníky jako obvykle. Jeden z výtisků se dostal do rukou Évaristovi, kde si přečetl provolání čtyřiceti pěti novinářů příčící se královĕ vůli; hlavní postavou byl **Louis-Adolphe Thiers** šéfredaktor novin Le National vyzývající lid k povstání. Po přečtení prohlášení si Galois nepřál nic jiného než se spolužáky z École Préparatoire vyjít do ulic a protestovat proti královu nařízení, avšak nic takového jemu ani spolužákům ředitel **Guigniault** v žádném případě nedovolil a nechal střežit všechny východy z budovy.

Nepokoje začaly v úterý 27. července odpoledne. Obyvatelé Paříže na ulice přinášeli všemožné harampádí, hlavně nábytek, a během tří dnů z něho vytvořili přes šest tisíc barikád. Během těchto dní, nazývaných **Trois Glorieuses** (Tři slavné dny), vypukly těžké boje, které byly doprovázeny zvoněním pařížských kostelních zvonů.

Bojů v latinské čtvrti se zúčastnilo rovněž okolo dvou set padesáti studentů polytechniky, kteří si násilím vynutili propuštění ze školy. Jak již bylo zmíněno, Galois a jeho spolužáci byli nuceni setrvat ve škole; zvuky probíhající revoluce mohli poslouchat maximálně ze zamřížovaných oken ústavu. Pro zabránění studentům v útěků byl ředitel ochoten použít všechny dostupné prostředky, dokonce i povolání policie.

Ve středu 28. července už to Galois nevydržel a pokusil se utéct ze školy, nicméně jeho pokus skončil nezdarem. Sice se mu podařilo přelézt školní zeď, avšak strážníky byl přiveden zpět. V ulicích se toho dne revoluce rozjela na plné obrátky. Na visutém mostě přes řeku Seinu vedoucímu k pařížské radnici došlo ke krvavé bitvě, kde bylo smrtelně zraněno mnoho občanů i vojáků. Radnice nakonec byla dobyta.

Boje, při nichž padly necelé čtyři tisíce lidí (okolo 2000 vojáků a 1800 obyvatel Paříže), skončily následujícího dne, tedy 29. července 1830. Mezi znesvářenými stranami došlo k uzavření kompromisu, na jehož základě se 30. července do Paříže dostavil vévoda orleánský, který byl 9. srpna korunován jako **Ludvík Filip I. Orleánský**. Sesazený král Karel X. odešel do exilu do Velké Británie. Spolu s ním

Francii opustil i slavný profesor matematiky Augustin Louis Cauchy. (Infeld 1952, str. 106 – 122; Livio 2008, str. 126 – 128; Toti Rigatelli 1996, str. 61 – 63)

Krátce po skončení bojů nabídl ředitel École Préparatoire Guigniault nové prozatímní vládě služby svých studentů. Zatímco ve středu jim zakazoval zúčastnit se bojů, hned ve čtvrtek to byl právě on, kdo na své hrudi hrdě nosil francouzskou trikoloru. Galois byl ředitelovým počínáním znechucen a bezmezně jím pohrdal. Čekal na první příležitost, kdy bude možno jeho pokrytectví a zbabělost veřejně vystavit na odiv. (Infeld 1952, str. 131; Livio 2008, str. 128; Toti Rigatelli 1996, str. 64 – 65)

### 1.2.5 Spolek přátel lidu

Na letní prázdniny roku 1830 Évariste odjel do rodného města Bourg-la-Reine. Byl to jeho poslední delší pobyt s rodinou. Jeho matka, ani bratr se sestrou, se nestačili divit, jak moc se změnil. Stal se z něj vášnivý revolucionář hájící republikánské ideje, za něž by byl ochoten položit život.

Začátkem října se Évariste vrátil do Paříže studovat druhý ročník na škole, která byla novou vládou dne 6. srpna zpět přejmenována na École Normale a zároveň byla doba studia prodloužena na tři roky. V téže době se Galois stal členem militantního křídla republikánské strany nazývaného **Société des Amis du Peuple** (Společnost přátel lidu), kde se seznámil s pozdějšími politickými vůdci, jimiž byli student práv **Louis Auguste Blanqui**, biolog **François-Vincent Raspail** a **Napoléon-Aimé Lebon**. Organizace byla pověstná tím, že k dosažení svých cílů neváhala použít násilí či agresi.

Na konci září se členové společnosti rozhodli vyvolat veřejnou diskuzi o zákonnosti voleb do poslanecké sněmovny před červencovou revolucí, které nový král schválil. Pro tento účel vytvořili plakát, jímž chtěli uvědomit občany, že mají právo na nové volby. Těsně před uvedením do tisku zabavila policie jeho ručně psanou verzi a zatknula předního činitele spolku Jeana-Louise Huberta. Na jeho místo nastoupil Raspail, za jehož vedení se ze společnosti stala tajná podzemní skupina. (Livio 2008, str. 128; Toti Rigatelli 1996, str. 66 – 68)

### 1.2.6 Vyloučení ze školy

Druhý ročník na École Normale zahájil Galois s myšlenkami na šíření republikánské ideologie mezi studenty a pomstu řediteli Guigniaultovi v souvislosti se zákazem účasti na červencových bojích. Často po něm požadoval něco, s čím by ředitel rozhodně nesouhlasil – například uniformy jako byly na École Polytéchnique nebo vojenský výcvik studentů. Tím si od ředitele, který zastával názor, že dobří studenti by se neměli zajímat o politiku, vysloužil zákaz vycházení.

Poslední kapkou bylo pro Évarista uveřejnění ředitelova dopisu dne 2. prosince 1830 v **Le Lycée** (Lyceum), jedněch ze dvou školních novin. Listem Guigniault veřejně zaútočil na liberálního učitele Guillarda z Lycea Ludvíka Velikého, který mimo jiné pracoval pro druhý školní plátek **La Gazette des Écoles** (Školní noviny), z něhož se následujícího dne řediteli dostalo anonymní odpovědi:

*Dopis, jenž pan Guigniault připojil do včerejšího Lycée k jednomu z článků ve vašich novinách, považuji za zcela nemravný. Myslím, že se budete zajímat o jakýkoliv pokus o demaskování tohoto člověka.*

*Zde jsou skutečnosti, které může dosvědčit 46 studentů.*

*Ráno 28. července, kdy si řada studentů École normale přála připojit se k povstání, jim pan Guigniault řekl, a to dvakrát, že by mohl povolat k obnovení pořádku policii. Policii 28. července!*

*Tentýž den nám pan Guigniault se svým obvyklým pedantstvím sdělil: „Na obou stranách bylo zabito mnoho statečných lidí. Kdybych byl vojákem, nevěděl bych, jaké rozhodnutí učinit. Co bych měl obětovat, svobodu nebo legitimitu?“*

*Toto je člověk, jenž si den poté připíchl na klobouk rozetu z trikolory. Takoví jsou naši pravověrní liberálové!*

*Také bych vás chtěl informovat, že studenti École normale, inspirováni ušlechtilým duchem patriotizmu, zcela nedávno předstoupili před pana Guigniaulta, aby jej informovali o svém záměru poslat ministerstvu školství petici žádající o zbraně a možnost účastnit se vojenského výcviku, aby byli schopni bránit své území, bude-li to zapotřebí.* (Livio 2008, str. 128 – 129)

Redaktoři novin jméno autora záměrně nezveřejnili. Galois autorství nikdy nepotvrdil, ani nepopřel, nicméně z něj byl všeobecně podezříván. To řediteli bohatě stačilo k vyloučení nepohodlného studenta, kterého považoval za nepolepšitelného výtržníka a buřiče. Ve vysvětlujícím dopise ministru školství Guigniault nepravdivě líčil, že se mu Galois k činu přiznal, a že jeho těžko zvládnutelnou povahu až do této chvíle toleroval.

Studenti École Normale Évarista příliš nepodpořili. Ti z humanitní větve školy se dokonce přiklonili na stranu ředitele – zřejmě tak učinili pod jeho tlakem a ze strachu o své postavení. Výměny názorů okolo Galoisova vyloučení na půdě École Normale trvaly celé tři týdny. Na stránkách školních časopisů se neustále střídaly dopisy na obranu Galoise s vyjádřeními na podporu Guigniaulta.

Dne 2. ledna 1831 vydal časopis La Gazette des Écoles Galoisův článek s titulkem **O vyučování přírodním vědám, profesorech, bádání a zkoušejících**. Jednalo se o pozoruhodný manifest, v němž poukazoval na nedostatky ve výuce přírodních věd. Zejména vytýkal, že jsou vyučovány jako vědy humanitní, tedy neustálým opakováním probírané látky bez jakéhokoliv porozumění. Dále zmínil nezájem studentů o učivo – ti se spíše starají o splnění požadovaných zkoušek než o hledání souvislostí v teorii. Nakonec vytknul prapodivný způsob zadávání otázek vyučujícími, kteří je tak činí nesrozumitelnými – snad ze strachu, že by jim zkoušení mohli rozumět... (Livio 2008, str. 128 – 131; Toti Rigatelli 1996, str. 68 – 75)

## 1.3 Neklidný život

Po vyloučení ze školy narukoval Galois do třetí dělostřelecké baterie Národní gardy, která měla charakter domobrany. Mohli se tam dostat pouze zámožnější občané, protože na každém nováčkovi bylo požadováno, aby si za vlastní peníze pořídil ne příliš levnou uniformu, která se skládala z modrého kabátku s červenými nárameníky, kalhot s červenými lampasy a čapky s rudým chocholem z koňských žíní. Republikánů tehdy bylo v Národní gardě málo, a tak tam neměli velký vliv; ve druhé a třetí baterii však měli převahu. (Infeld 1952, str. 150)

Poslední den roku 1830, tedy 31. prosince, byla Národní garda reorganizována a dělostřelectvo rozpuštěno. Členy nově mohli být pouze daňoví poplatníci, mezi něž Galois nepatřil. (Livio 2008, str. 131)

### 1.3.1 Vlastní přednášky

Z důvodu nedostatku finančních prostředků po ukončení studia se Évariste rozhodl, že bude soukromě vyučovat matematiku. Nechal si otisknout inzerát ve školním časopise La Gazette des Écoles, v němž nabízel kurz algebry pro studenty, kteří si uvědomují nízkou úroveň výuky matematiky ve školách, své znalosti si chtějí prohloubit a zároveň se dozvědět i něco nad rámec osnov. Prostory pro pořádání výuky mu zapůjčil jeho známý knihkupec **Caillot** ve svém knihkupectví v ulici **Rue de la Sorbonne**.

První přednáška se konala dne 13. ledna 1831 od čtvrt na dvě odpoledne. Přihlásilo se asi čtyřicet posluchačů, mezi nimiž bylo mnoho Évaristových republikánských přátel. Také přišlo pár studentů z École Normale, kteří se, více než na algebru, chtěli podívat na svého bývalého spolužáka s nepříliš valnou pověstí. Z důvodu mimořádné obtížnosti probírané látky se posluchači z kurzu postupně odhlašovali – příští týden přišlo jen deset lidí a na následující přednášku se dostavili pouze čtyři posluchači. Třetí přednáška se zároveň stala poslední. (Infeld 1952, str. 158 – 161; Livio 2008, str. 131)

Na žádost profesora Poissona z Akademie věd sepsal Évariste 16. ledna novou jedenáctistránkovou práci o podmínkách řešitelnosti rovnic pomocí radikálů a ještě téhož dne ji zaslal na sekretariát akademie. Hned následujícího dne byl rukopis předán k posouzení – tímto úkolem byli pověřeni již zmíněný **Siméon Denis Poisson** a **Sylvestre François Lacroix**. Opět se více než dva měsíce nic nedělo, a tak se znechucený Galois rozhodl 31. března akademii napsat dopis. Žádal v něm, aby mu bylo obratem sděleno, kdy mají pánové Lacroix a Poisson v plánu podat o lednovém rukopise zprávu, nebo zda ho náhodou neztratili, jako se tomu v minulosti již stalo. Rovněž tento dotaz bohužel zůstal bez odpovědi. (Infeld 1952, str. 161 – 162, 166 – 167; Livio 2008, str. 131 – 132)

### 1.3.2 Přípitek na Ludvíka Filipa

Dne 16. dubna 1831 se konalo přelíčení s devatenácti členy Národní gardy (z tisku známé jako „proces s devatenácti“), kteří se po rozpuštění svých dělostřeleckých baterií odmítli odzbrojit. Mimo jiné mezi ně patřil také republikán **Pécheux**

**d’Herbinville**, výborný řečník z aristokratické rodiny. Pro obžalované proces skončil dobře – všichni byli obžaloby zproštěni.

Na oslavu propuštění všech devatenácti obžalovaných uspořádal 9. května Spolek přátel lidu velký banket, jenž se konal v restauraci **Aux Vendanges de Bourgogne**. Zúčastnilo se ho okolo dvou set republikánů – mezi nimi byli Galois, Raspail a také známý spisovatel **Alexandre Dumas**, který v díle **Mes Mémoires** (Moje vzpomínky) uvedl: *„Těžko by se našly v celé Paříži dvě stovky hostů, kteří by byli vůči vládě naladěni nepříznivěji než tito lidé.*“ (Livio 2008, str. 132)

Bylo proneseno mnoho přípitků – na počest revolucí v letech 1789 a 1793, na Robespierra, na Raspaila, … Snad nejoriginálnější přípitek pronesl Dumas: *„Připíjím na umění! Ať pero a štětec přispívají stejně tak jako pistole a meč ke společenské obnově, jíž jsme zasvětili své životy a pro niž jsme připraveni zemřít.*“ (Livio 2008, str. 132) Poslední přípitek, na Ludvíka Filipa, měl na svědomí Évariste Galois, který při jeho zvolání v jedné ruce držel pohár vína a ve druhé svíral dýku, jejíž ostří mířilo k okraji sklenice. Nejprve byla společnost tímto troufalým přípitkem pobouřena, avšak při pohledu na jeho strůjce stojícího s dýkou v ruce změnila názor – přítomní začali brát ze stolů nože a jeho postoj napodobovat.

Příštího dne byl Galois za svůj čin, jímž údajně vyhrožoval králi smrtí, zatčen a převezen na policejní prefekturu na **Place de Dauphine**. Následujícího dne byl přepraven do vazby ve věznici **Sainte-Pélagie** (Svaté Pélagie), v níž měli političtí vězňové své vlastní oddělení, kde se mohli volně pohybovat a diskutovat o politické situaci. (Infeld 1952, str. 167 – 179; Livio 2008, str. 132 – 133; Toti Rigatelli 1996, str. 82)

Soud v tomto případu se konal až 15. června 1831. Po vyslechnutí rozsudku byl obžalovaný vyzván, aby popsal, za jakým účelem se banket konal a co se tam odehrálo. Potom mu soudce položil zásadní otázku, zda pronesl přípitek na zdraví Ludvíka Filipa a držel při tom nůž v ruce. Jeho odpověď zněla: *„Měl jsem nůž ke krájení masa. Zamával jsem jím a řekl: ‚Na Ludvíka Filipa, jestliže nás zradí.‘ Poslední slova byla slyšet jen v mé bezprostřední blízkosti, protože mezitím začali pískat lidé, kteří má slova pochopili jako přípitek na zdraví Ludvíka Filipa.*“ (Livio 2008, str. 133) Na následující otázku udiveného soudce, zda se obžalovaný skutečně obává, že by král byl schopen zradit národ, Galois odpověděl, že královo jednání přináší pochyby o jeho dobré víře, i když v tom nemusí být špatný úmysl.

Po předvolání svědků případu se v líčení řešila právnická otázka, zda se jednalo o banket veřejný či soukromý – v případě veřejného by se totiž Galoisův čin mohl hodnotit jako provokace k vyvolání násilí vůči králi. Závěrečnou řeč obžalovaného v jeho zájmu soudce raději zkrátil, neboť tušil, že by si Galois svými neuváženými výroky mohl zpečetit osud. Přes všechny nepříznivé skutečnosti byl Évariste po velmi krátké poradě rozhodčí poroty nakonec zproštěn obžaloby. (Livio 2008, str. 133 – 134)

### 1.3.3 Posudek z Akademie

Dne 4. července 1831 posuzovatelé Poisson a Lacroix konečně přišli s verdiktem nad prací Évarista Galoise. Jejich zpráva byla uveřejněna o týden později na zasedání Akademie věd:

> *Snažili jsme se ze všech sil, abychom pochopili důkaz pana Galoise. Jeho úvahy nejsou ani dostatečně jasné, ani dostatečně rozvinuté, abychom byli schopni posoudit jejich exaktnost, takže nejsme s to předložit v této zprávě patřičný názor. Autor uvádí, že teze, která je námětem jeho pojednání, je součástí obecné teorie, jež by mohla vést k mnoha dalším využitím. Často se stává, že různé části nějaké teorie objasňují jedna druhou a je snazší pochopit je spíše v celku než odděleně. S vytvořením definitivního posudku by se tedy mělo počkat, až autor vydá svou práci v celém rozsahu; ve stavu, v němž část předložená Akademii nyní je, vám nemůžeme doporučit, abyste jí udělili své dobrozdání.* (Livio 2008, str. 135)

Z této vyhýbavé odpovědi se dá usuzovat, že Poisson a Lacroix buď s novým přístupem využívajícím grupy nesouhlasili, nebo ho nepochopili. Jejich nepochopení mohlo být způsobeno nejasnou formulací, s níž se autor potýkal již v minulosti; možná na vině bylo vynechání více vysvětlení, než bylo nutno. Nejpravděpodobnější však je, že posuzovatelé v rukopise nenašli, co hledali. Očekávali nějaké jednoduché kritérium založené na koeficientech rovnice, které dá odpověď na otázku, zda rovnice je řešitelná vzorcem či není, setkali se však s teorií grup, novým konceptem, kde byly podmínky řešitelnosti rovnice založeny na jejích předpokládaných řešeních. Na rok 1831 byly Galoisovy myšlenky příliš pokrokové, než aby byly konzervativním světem akceptovány, a tak si na své přijetí společností musely ještě počkat.

Pro Galoise posudek znamenal zásadní neúspěch, avšak o správnosti svých myšlenek přesvědčen být nepřestal. Neuznání z řad matematiků a prožité politické problémy mu na psychickém stavu rozhodně nepřidaly. V jeho vztahu s matkou se začaly objevovat nesrovnalosti, a proto se rozhodl ze svého rodiště přestěhovat. Pronajal si byt v Paříži, konkrétně v ulici **Rue des Bernardins**, v domě číslo 16. (Livio 2008, str. 135 – 136)

### 1.3.4 Výročí dobytí Bastily

Na 14. července, den oslavy 42. výročí dobytí Bastily roku 1789, plánovali republikáni velkou demonstraci zaměřenou především na provokativní akci na náměstí Bastily, kde byl před čtyřiceti lety zasazen symbolický strom svobody. V noci ze 13. na 14. července policie preventivně zatkla mnoho známých aktivistů, mezi nimiž byl také Raspail; Galois však zadržení uniknul.

Inkriminovaný den okolo poledne se Galois se svým přítelem **Ernestem Armandem Duchâteletem**, studentem na École des Chartes, a skupinou dalších asi šesti set lidí rozhodl přejít přes most **Pont Neuf**. Évariste byl ozbrojen několika pistolemi, dýkou a nabitou puškou. Oba byli oblečeni do stejnokrojů rozpuštěného dělostřelectva Národní gardy, což tehdy již bylo protizákonné. Za tento přečin byli oba hned na mostě zatčeni a vsazeni do vazby na policejní stanici v ulici **Rue de Thionville**.

Vše se zkomplikovalo tím, že Duchâtelet na zeď své cely namaloval hrušku, která představovala hlavu krále Ludvíka Filipa, ležící vedle gilotiny. Obrázek byl doplněn mezi republikány tehdy oblíbeným heslem: *„Filip ponese svou hlavu na tvůj oltář, ó Svobodo*.“ (Livio 2008, str. 137) Námětem pro kresbu byla karikatura malíře **Honoré Daumiera**, která zobrazovala hlavu krále postupně se měnící v hrušku (vizte Livio 2008, str. 137, Obr. 63). Příštího dne byli obžalovaní vyslechnuti a převezeni do věznice Svaté Pélagie.

Soud s nimi se konal 23. října 1831. Nad protizákonným nošením dělostřelecké uniformy nebylo pochyb, a proto byli oba uznáni vinnými. Zatímco Galois dostal značně tvrdý trest šesti měsíců, Duchâtelet si vysloužil pouze tři. Podstatnou roli v tom pravděpodobně hrála skutečnost, že se Galois řadil mezi známé výtržníky. Sice se 3. prosince proti trestu odvolal, avšak jeho rozsudek byl potvrzen. (Livio 2008, str. 136 – 138)

### 1.3.5 Vězení Svaté Pélagie

Oba odsouzení byli převezeni do věznice Svaté Pélagie, kde byli trestanci rozmisťování dle druhu spáchaného zločinu a političtí vězňové, jak již bylo zmíněno, měli vlastní oddělení. Areál byl tvořen třemi atrii a obehnán vysokou zdí. Galois, patřící mezi nejchudší delikventy, byl ubytován ve velké cele čítající šedesát lůžek. Zámožnější vězňové si mohli připlatit za cely jednolůžkové a nechat si donášet stravu z okolních restaurací.

Informace o Galoisově pobytu ve věznici pocházejí hlavně od jeho spoluvězňů, mezi nimž byli Raspail, který o svém pobytu za mřížemi sepsal **Lettres sur les prisons du Paris** (Dopisy o pařížských věznicích), nebo básník **Gérard Nerval**, jenž napsal báseň týkající se tohoto tématu.

Raspail ve svém díle zmiňuje oslavu Tří slavných dní loňské červencové revoluce, kdy třetí den oslav jednoho ze zúčastněných vězňů zranil výstřel vypálený z ulice. Na následné schůzce zástupců vězňů s vedoucím dozorců Galois údajně jednoho z dozorců urážel a obvinil ho ze střelby. Za svůj troufalý čin byl uvržen do kobky. Mezi ostatními vězni tento krok vyvolal velmi nepřátelskou reakci, při níž se jim podařilo zmocnit se vlády nad věznicí. Pořádek byl zjednán až následujícího dne. Aby se předešlo dalším nepokojům, byl Galois raději propuštěn.

Druhou vzpomínkou je Galoisův pokus o sebevraždu. Mladík nebyl zvyklý holdovat alkoholu, a tak ho spoluvězni často nutili, aby se opíjel do němoty. Jednou, když byl v podroušeném stavu, svěřil se Raspailovi o svém bolu ohledně otcovy smrti, s jehož ztrátou se stále nebyl schopný vyrovnat. Když se ho potom Raspail s ostatními snažili položit na postel, vykřikl Galois: „*Pohrdáte mnou, vy, který jste mým přítelem! Máte pravdu, ale já, který jsem spáchal takový zločin, se musím zabít!*“ (Livio 2008, str. 139) Díky rychlé reakci jednoho z trestanců se naštěstí podařilo nešťastníkovi v činu zabránit.

Častou návštěvnicí byla u Évarista jeho sestra Nathalie-Théodore, která o svého bratra pečovala, jak jen mohla. Jeho špatný zdravotní a duševní stav výstižně popisuje zápis ze sestřina deníku:

> *Vydržet ještě dalších pět měsíců bez možnosti nadechnout se čerstvého vzduchu! To je velmi špatná vyhlídka a bojím se, že jeho zdraví velmi utrpí. Je již tak unaven. Zakazuje si rozptylovat se jakoukoli myšlenkou, ponořil se do ponuré nálady, kvůli níž předčasně stárne. Oči má vpadlé, jako by mu bylo padesát!* (Livio 2008, str. 139)

Když se zrovna neúčastnil republikánských vlasteneckých večírků nebo nebyl opilý, procházel se Galois po dvoře a přemýšlel o svých matematických pracích. V říjnu 1831 se rozhodl napsat úvod ke svým hlavním dílům. Tento rozsáhlý text se stal ostrou kritikou tehdejších praktik ve vědeckém světě. (Livio 2008, str. 138 – 139)

Pro ilustraci uvádím znění prvního odstavce:

> *Čtenář mi musí prominout především to, že příští stránka nebude zaplněna velkými jmény a tituly či chválou skoupých knížat, jichž měšec se otevírá závisle na množství použitého kadidla. Čtenář zde také nenajde jména slavných mužů vědy, ochotných pomoci člověku, jenž našel odvahu vydat tiskem vědeckou práci, maje sotva dvacet let. Mohu naproti tomu prohlásit, že jsem napsal tuto knihu, aniž jsem se zatížil nějakými dluhy nebo závazky. Lhal bych, kdybych tvrdil, že mi někdo pomohl radou nebo povzbuzením. A přísahám, že jsem-li něco dlužen lidem proslaveným ve světě vědy, pak to v žádném případě není vděčnost. Oni mají na svědomí, že tato kniha vychází tak pozdě.* (Infeld 1952, str. 210)

V následujícím odstavci se Galois zmiňuje o osudu svých tří rukopisů, které zaslal Akademii věd – první dva se záhadně ztratily, zatímco třetí zůstal nepochopen. Přes vlnu nepřátelsky laděných myšlenek končí úvod určitou nadějí:

> *Jakmile ze světa vědy zmizí nezdravé soupeření a sobectví, až lidé začnou opravdu vzájemně spolupracovat a nebudou posílat zapečetěné obálky do Akademie, pak budou ochotněji zveřejňovat i malé objevy, jen když budou nové, a nebudou se stydět dodat slůvko ‚nevím', půjde-li o zbytek.* (Infeld 1952, str. 212)

### 1.3.6 Nešťastná láska

Začátkem roku 1832 se z Asie do Evropy dostala epidemie cholery. Na jaře byla nejvíce zasažena Paříž, kde denně umíraly stovky lidí. Nákaza se šířila kontaminovanou vodou ze Seiny.

Dne 16. března byl Galois z věznice podmínečně přesunut do sanatoria **Sieur Faultrier** v ulici **Rue de l'Oursine**. Důvodem mohlo být jeho podlomené zdraví; pravděpodobněji se tak stalo proto, že to tenkrát bylo u politických vězňů běžné. Jedním z lékařů zotavovny byl blízký přítel majitele sanatoria bývalý důstojník napoleonské armády **Jean-Paul Louis Auguste Potterin du Motel**, který se svou rodinou v budově bydlel.

Tehdy se Évariste zamiloval do jeho dcery **Stéphanie**, které bylo necelých sedmnáct let. Málokterý vztah známý z historie skončil tak tragicky jako tento. Zezačátku dívka o inteligentního mladého muže jevila zájem, brzy ho však začala nekompromisně odmítat. Co se mezi nimi mohlo stát? Z fragmentů dopisu, který dostal od Stéphanie, lze usuzovat, že jí nezkušený Évariste řekl něco nevhodného, co se jí mohlo dotknout. Ve druhém dopise už dívka nestála ani o jeho přátelství, což Galoise srazilo na kolena.

Jeho psychický stav dokumentuje zpráva ze dne 25. května 1832 adresovaná příteli Augustu Chevalierovi, jenž se v dubnu se svým bratrem a asi třicetičlennou skupinou lidí vydal do městečka Ménilmontant založit společně saintsimonistickou komunu. (Livio 2008, str. 141 – 143; Toti Rigatelli 1996, str. 104 – 105) Začátek dopisu vypadal takto:

> *Můj drahý příteli, ve smutku lze najít potěšení, doufáme-li v útěchu. Můžeme být šťastni, že trpíme, pokud máme přátele. Tvůj dopis plný apoštolské důstojnosti mi dodal trochu klidu. Jak ale mohu setřít stopy tak bouřlivých citů, jaké jsem zakusil? Jak se mohu utěšovat, když jsem za jeden měsíc vyčerpal ten největší zdroj štěstí, jaký může člověk mít? Jestliže jsem jej vyčerpal bez štěstí, bez naděje, jestliže jsem si jist, že jsem jej vyčerpal nadosmrti?* (Livio 2008, str. 143)

### 1.3.7 Záhadná smrt

Kolem matematikovy smrti koluje mnoho dohadů a nepřesností. Nepravděpodobněji Galois řekl Stéphanii něco, čím se jí dotkl; případně za to mohlo jeho impulsivní chování. Dívka se s tím svěřila dalším dvěma mužům, kteří se s Évaristem sešli. Na schůzce se mladík dopustil další chyby, když vzniklou záležitost označil za sprostou pomluvu. To však neměl dělat – oba protivníci chtěli uhájit čest Stéphanie, a vyzvali ho proto na souboj.

Totožnost mužů není jednoznačně známá. Jedním z nich byl nejspíše majitel zotavovny Denis Faultrier, druhým buď Stéphaniin otec, nebo Galoisův přítel Duchâtelet, který byl kdysi také do sanatoria propuštěn z vězení a Stéphanii proto znal. Známým faktům pak nejlépe odpovídá dvojice **Faultrier** a **Duchâtelet**.

V noci před soubojem sepsal Évariste tři dopisy. První z nich byl „**Dopis všem republikánům**“, který pojal jako omluvu. Druhé psaní, z něhož je patrné, že protivníci se také řadili k republikánům, věnoval svým dvěma přátelům N. L. a V. D., pravděpodobně **Napoléonu Lebonovi** a **Vincentu Delaunaymu**.

Třetí obsáhlý dopis, adresovaný **Augustu Chevalierovi**, je z pohledu matematiky nejcennější – shrnuje Galoisovy zásadní myšlenky. Jeho součástí je rovněž poslední rukopis odmítnutý Akademií věd, k němuž autor přidal ještě další poznámky a nové teze, ke kterým dospěl. V závěru dopisu uvádí, že to nejsou jediné problémy, jejichž řešením se zabýval, a že již nemá čas je zde uvádět. V poslední větě vyjadřuje prosbu: „*Požádejte veřejně Jacobiho nebo Gausse, aby se vyjádřili nikoli k pravdivosti, ale k významu těchto tezí. Potom snad, doufám, někteří lidé shledají užitečným tenhle zmatek rozluštit.*“ (Livio 2008, str. 145)

Souboj se konal 30. května v šest hodin ráno poblíž rybníka **Glacier** v Gentilly. Postupovalo ve stylu ruské rulety. První byl na řadě Duchâtelet, který si vybral nabitou zbraň a Évarista zasáhl z pravé strany do žaludku. Kulka prošla přes střeva a zastavila se v levé hýždi. Potom postřelený spadl na zem a pohmoždil si hlavu.

V 9:30 byl dle záznamů přijat do nemocnice **Cochin**, avšak není jisté, kdo ho tam převezl. Dle svědectví to byl náhodný kolemjdoucí rolník, z čehož plyne, že účastníci souboje po střelbě místo opustili.

Z rodinných příslušníků se o Évaristově zranění dozvěděl pouze jeho bratr Alfred, který se neprodleně dostavil do nemocnice. Poslední věta, kterou řekl Évariste smutnícímu bratrovi, byla: *„Neplač, teď potřebuji sebrat veškerou odvahu, abych zemřel ve dvaceti.*“ (Livio 2008, str. 147) K úmrtí došlo následujícího dne, 31. května 1832, v deset hodin dopoledne. (Livio 2008, str. 144 – 154)

Galoisova pohřbu, který se uskutečnil 2. června 1832 na hřbitově v pařížském **Montparnassu**, se zúčastnilo několik tisíc lidí, mezi nimiž byli studenti práv a medicíny a členové Společnosti přátel lidu, jejíž předáci **Plagniol** a **Pinel** pronesli smuteční řeči. Pokud republikáni hodlali pohřeb využít k rozpoutání nepokojů, plány jim překazil policejní prefekt **Gisquet**, který v předvečer události nechal preventivně zatknout asi třicet z nich a na průběh pohřbu bedlivě dohlížel. (Livio 2008, str. 154; Toti Rigatelli 1996, str. 113)

## 1.4 Posmrtné uznání

Alfred Galois a Auguste Chevalier se rozhodli Évaristovu matematickou práci zachránit před zapomněním. Shromáždili všechny jeho rukopisy, sepsali jejich seznam a zaslali Galoisovo dílo matematikovi **Josephu Liouvilleovi**, u nehož si získalo velký obdiv. Svůj projev k Akademii věd v roce 1843 zahájil slovy:

> *„Doufám, že zaujmu Akademii sdělením, že mezi studiemi Évarista Galoise jsem nalezl nádherné řešení otázky, jak rozhodnout, zda daná neredukovatelná rovnice prvočíselného stupně je či není řešitelná radikály. Řešení je to stejně exaktní jako hluboké.“* (Livio 2008, str. 155)

V roce 1846 pak svém časopise **Liouville’s Journal** Galoisovy statě vydal s komentářem: *„Pochopil jsem naprostou exaktnost metody, jíž Galois dokazuje zvláště tuto nádhernou větu o řešitelnosti rovnic.*“ (Livio 2008, str. 155)

Po přečtení studií v Liouvillově časopisu kontaktoval **Carl Gustav Jacob Jacobi** Alfreda Galoise s cílem najít další Évaristovy práce o transcendentálních funkcích.

Roku 1856 se ve Francii a v Německu stala Galoisova teorie součástí výuky pokročilé algebry. (Livio 2008, str. 154 – 155)

# 2 Řešení polynomických rovnic pomocí vzorců

Představím základní metody, v době Évarista Galoise již známé, jak řešit polynomické rovnice pomocí vzorců. To lze pouze u rovnic stupně prvního (lineárních), druhého (kvadratických), třetího (kubických) a čtvrtého (kvartických). Úkol vyřešit lineární rovnici je triviální; řešení kvadratických rovnic by mělo být známé každému absolventovi středoškolské matematiky, ovšem vzorce pro rovnice kubické a kvartické jsou docela složité, nicméně v rozšiřujících matematických cvičeních či pro zájemce z řad studentů určitě použitelné. Všechny metody se budu snažit srozumitelně odvodit.

## 2.1 Lineární rovnice

<u>Odvození</u>: Nechť $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. Obecný předpis lineární rovnice s neznámou $x$ vypadá takto:

$$ax + b = 0$$

Její řešení je jednoduché:

$$ax = -b$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{b}{a}}}$$

## 2.2 Kvadratická rovnice

Řešení kvadratických rovnic bylo známé již starým Babyloňanům, Řekům a indickým matematikům v 7. století. (Livio 2008, str. 69)

<u>Odvození</u>: Nechť $a, b, c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. Obecný předpis kvadratické rovnice s neznámou $x$ vypadá takto:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vydělením koeficientem $a$ se rovnice převede na normovaný tvar:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Substitucí $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$ se upraví na:

$$x^2 + px + q = 0$$

Doplněním na čtverec vychází:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

Nyní výraz stačí odmocnit, vyjádřit neznámou *x* a upravit:

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Nakonec se provede zpětná substituce za parametry *p*, *q*. Po úpravě vyjde vzorec:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kořeny $x_1$ a $x_2$ kvadratické rovnice jsou:

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}, \quad \underline{\underline{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}.$$

## 2.3 Kubická rovnice

### 2.3.1 Cardanův vzorec

Pro řešení kubické rovnice existuje takzvaný **Cardanův vzorec**. Pojmenován je po italském matematikovi, astrologovi, astronomovi, lékaři a filozofovi jménem **Gerolamo Cardano** (1501 – 1576), který jej v roce 1545 uveřejnil v knize **Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis Liber Unus** (Velké umění neboli První kniha pravidel algebry) dnes známé spíše jako **Ars Magna**. Autory tohoto vzorce jsou nezávisle na sobě **Niccolò Fontana Tartaglia** (1500 – 1557) a **Scipione dal Ferro** (1465 – 1526). (Livio 2008, str. 72 – 79)

Odvození: Nechť $a,b,c,d \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. Obecný předpis kubické rovnice s neznámou $x$ vypadá takto:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Pro další postup je opět nutný normovaný tvar, jehož se dosáhne vydělením koeficientem $a$ kubického členu:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Substitucí $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, $r = \frac{d}{a}$ se rovnice zjednoduší na:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

V dalším kroku je třeba se zbavit kvadratického členu. Toho se docílí substitucí $y = x + \frac{p}{3}$, tedy $x = y - \frac{p}{3}$, kde $y$ je neznámá:

$$\left(y - \frac{p}{3}\right)^3 + p \cdot \left(y - \frac{p}{3}\right)^2 + q \cdot \left(y - \frac{p}{3}\right) + r = 0$$

$$y^3 - py^2 + \frac{p^2}{3}y - \frac{p^3}{27} + py^2 - \frac{2p^2}{3}y + \frac{p^3}{9} + qy - \frac{pq}{3} + r = 0$$

$$y^3 + \left(-\frac{p^2}{3} + q\right)y + \left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right) = 0$$

Koeficient lineárního členu a absolutní člen vypadají docela složitě. Zavede se proto další substituce $k = -\frac{p^2}{3} + q$ pro lineární člen[2] a $l = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r$ pro absolutní člen, která rovnici převede na tvar, z něhož je původně Cardanův vzorec odvozen:

$$\boxed{y^3 + ky + l = 0} \tag{1}$$

Následuje zásadní myšlenka. Předpokládejme, že existují dvě neznámé *u*, *v*, pro něž platí:

$$y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \tag{2}$$

Po umocnění na třetí pro $y^3$ platí:

$$y^3 = u + 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{uv^2} + v$$

$$y^3 = u + v + 3\sqrt[3]{uv}\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)$$

$$y^3 - 3\sqrt[3]{uv} \cdot y - u - v = 0$$

Aby platila rovnice (1), musí být:

$$k = -3\sqrt[3]{uv} \tag{3}$$

$$l = -u - v \tag{4}$$

Rovnici (3) umocním na třetí a vyjádřím z ní *uv*:

$$k^3 = -27uv$$

$$uv = -\frac{k^3}{27} \tag{5}$$

Z rovnice (4) plyne $u = -v - l$. Dosazením tohoto výrazu do rovnice (5) vyjde kvadratický vztah pro neznámou *v*, který již umíme vyřešit:

$$(-v - l)v = -\frac{k^3}{27}$$

[2] (Stewart, 2004, str. 8): při odvozování vzorců s jiným značením chybně uvedena hodnota *k* ve tvaru ekvivalentním s: $k = \frac{p^2 - 2p^3 + 3q}{3}$

$$v^2 + lv - \frac{k^3}{27} = 0$$

$$v = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}} \qquad (6)$$

Neznámá $u$ se vypočítá snadno:

$$u = -v - l$$

$$u = -\left( -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}} \right) - l$$

$$u = -\frac{l}{2} \mp \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}} \qquad (7)$$

Pro odvození Cardanova vzorce pouze stačí dosadit vyjádření (6) a (7) do vztahu (2). V případě obou možností dosazení (plus nebo mínus před odmocninou) vyjde stejný výraz:

$$\boxed{y = \sqrt[3]{-\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}}}$$

Posledním krokem je převedení neznámé $y = x + \frac{p}{3}$ zpět na $x$:

$$\underline{\underline{x = -\frac{p}{3} + \sqrt[3]{-\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}}}}\ ,$$

kde $p = \frac{b}{a}$, $k = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$, $l = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}$.

Tímto postupem však vyjde pouze jeden kořen. Nad komplexními čísly však má každý polynom třetího stupně tři kořeny. Metodu, která dává všechny kořeny, představím v následujícím oddíle. Použití Cardanova vzorce předvedu v následující úloze.

**Úloha 1**: Vyřešte rovnici $y^3 + 3y - 36 = 0$ nad **C**. (Stewart, 2004, str. 10)

Rovnice již je v normovaném tvaru a bez kvadratického členu, tedy ve tvaru $y^3 + ky + l = 0$. Hodnoty koeficientů jsou: $k = 3$ a $l = -36$; dosadím je do Cardanova vzorce $y = \sqrt[3]{-\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}}$:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{-36}{2} + \sqrt{\frac{(-36)^2}{4} + \frac{3^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-36}{2} - \sqrt{\frac{(-36)^2}{4} + \frac{3^3}{27}}}$$

$$y = \sqrt[3]{18 + \sqrt{324 + 1}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{324 + 1}}$$

$$y = \sqrt[3]{18 + \sqrt{325}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{325}}$$

Získal jsem tak vyjádření ve tvaru odmocnin pro neznámou *y*.[3] K výpočtu její číselné hodnoty musím odmocniny přibližně vyčíslit:

$$y \doteq \sqrt[3]{18 + 18{,}02776} + \sqrt[3]{18 - 18{,}02776}$$

$$y \doteq \sqrt[3]{36{,}02776} + \sqrt[3]{-0{,}02776}$$

$$y \doteq 3{,}30278 - 0{,}30278$$

$$\underline{\underline{y = 3}}$$

Přesto je výsledkem celé číslo 3, což lze snadno ověřit zkouškou. Jedná se pouze o jeden reálný kořen, avšak nad množinou všech komplexních čísel, jak již bylo zmíněno, má rovnice třetího stupně 3 kořeny. S tímto problémem si však není těžké poradit. Pro získání dvou zbývajících kořenů je možno původní výraz $y^3 + 3y - 36$ vydělit lineárním členem $y - 3$ obsahujícím vypočítaný kořen. Tím se sníží stupeň původní rovnice na kvadratickou, kterou snadno vyřešíme:

$$(y^3 + 3y - 36) : (y - 3) = \underline{y^2 + 3y + 12}$$

Její koeficienty $a = 1$, $b = 3$, $c = 12$ dosadím do vzorce $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

[3] (Stewart, 2004, str. 10): v řešení příkladu v obou případech pod třetí odmocninou chybně uvedena hodnota –18

$$y=\frac{-3\pm\sqrt{-39}}{2}=\frac{-3\pm \mathrm{i}\sqrt{39}}{2}$$

Dalšími dvěma kořeny rovnice jsou $\underline{\underline{y=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{39}}{2}\mathrm{i}}}$ a $\underline{\underline{y=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{39}}{2}\mathrm{i}}}$.

### 2.3.2 Huddeho rezolventa

Další možností, jak řešit kubické rovnice, je od 17. století pomocí takzvané Huddeho rezolventy. Jejím autorem je holandský matematik **Johann Hudde** (1628 – 1704). Oproti Cardanovu vzorci dává tato metoda všechny tři komplexní kořeny rovnice.

<u>Odvození</u>: Hudde pracoval s normovanou kubickou rovnicí bez kvadratického členu ve tvaru $\boxed{x^3+kx+l=0}$. Obecnou rovnici třetího stupně lze na tento tvar převést způsobem popsaným u odvození Cardanova vzorce.

V prvním kroku odvození se postupuje užitím substituce $x=y-\frac{k}{3y}$:

$$\left(y-\frac{k}{3y}\right)^3+k\cdot\left(y-\frac{k}{3y}\right)+l=0$$

$$y^3-ky+\frac{k^2}{3y}-\frac{k^3}{27y^3}+ky-\frac{k^2}{3y}+l=0$$

$$y^3-\frac{k^3}{27y^3}+l=0$$

Vynásobením $y^3$ vyjde zmiňovaná **Huddeho rezolventa**:

$$\boxed{y^6+ly^3-\frac{k^3}{27}=0}$$

Jedná se sice o rovnici šestého stupně, je však jednodušší než původní rovnice. Nakonec označím $y^3=v$:

$$v^2+lv-\frac{k^3}{27}=0$$

Potom $v_{1,2} = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}$, tedy:

$$v_1 = -\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}, \quad v_2 = -\frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}$$

Pro kořeny Huddeho rezolventy platí:

$$y_1 = \sqrt[3]{v_1}, \qquad y_4 = \sqrt[3]{v_2},$$

$$y_2 = \omega \cdot \sqrt[3]{v_1}, \qquad y_5 = \omega \cdot \sqrt[3]{v_2},$$

$$y_3 = \omega^2 \cdot \sqrt[3]{v_1}, \qquad y_6 = \omega^2 \cdot \sqrt[3]{v_2},$$

kde $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, tedy třetí komplexní odmocnina z jednotky.[4] Potom platí pro kořeny původní rovnice:

$$x_1 = y_1 + y_4 = \sqrt[3]{v_1} + \sqrt[3]{v_2}$$

$$x_2 = y_3 + y_5 = \omega^2 \cdot \sqrt[3]{v_1} + \omega \cdot \sqrt[3]{v_2}$$

$$x_3 = y_2 + y_6 = \omega \cdot \sqrt[3]{v_1} + \omega^2 \cdot \sqrt[3]{v_2}$$

**Návrat k úloze 1**: Vyřešte rovnici $x^3 + 3x - 36 = 0$ nad **C**.

Koeficienty $k = 3$ a $l = -36$ dosadím do vztahů pro $v_1$ a $v_2$:

$$v_1 = -\frac{-36}{2} + \sqrt{\frac{(-36)^2}{4} + \frac{3^3}{27}} = 18 + \sqrt{325} \doteq 36{,}02776$$

$$v_2 = -\frac{-36}{2} - \sqrt{\frac{(-36)^2}{4} + \frac{3^3}{27}} = 18 - \sqrt{325} \doteq -0{,}02776$$

Následným dosazením do vztahů pro jednotlivé neznámé vyjde:

$$x_1 = \sqrt[3]{18 + \sqrt{325}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{325}}$$

$$x_1 \doteq 3{,}30278 - 0{,}30278$$

---

[4] Poznamenám, že umocněním $\omega$ na druhou vyjde $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, takže platí $\omega^2 = \overline{\omega}$.

$$\underline{\underline{x_1 = 3}}$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) \cdot \sqrt[3]{18 + \sqrt{325}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) \cdot \sqrt[3]{18 - \sqrt{325}}$$

$$x_2 \doteq 3{,}30278 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) - 0{,}30278 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$$

$$x_2 \doteq -\frac{3{,}30278}{2} - \frac{3{,}30278\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} + \frac{0{,}30278}{2} - \frac{0{,}30278\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

$$\underline{\underline{x_2 \doteq -\frac{3}{2} - \frac{3{,}60556\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}}$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) \cdot \sqrt[3]{18 + \sqrt{325}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) \cdot \sqrt[3]{18 - \sqrt{325}}$$

$$x_3 \doteq 3{,}30278 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) - 0{,}30278 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$$

$$x_3 \doteq -\frac{3{,}30278}{2} + \frac{3{,}30278\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} + \frac{0{,}30278}{2} + \frac{0{,}30278\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

$$\underline{\underline{x_3 \doteq -\frac{3}{2} + \frac{3{,}60556\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}}$$

Jelikož $3{,}60556^2 \doteq 13$, pak $3{,}60556 \cdot \sqrt{3} \doteq \sqrt{13} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{39}$. Rovnice $x^3 + 3x - 36 = 0$ má tedy tři kořeny:

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{39}}{2}\mathrm{i}, \qquad x_3 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{39}}{2}\mathrm{i}.$$

## 2.4 Kvartická rovnice

### 2.4.1 Ferrariho vzorec

Pro řešení rovnic čtvrtého stupně slouží takzvaný **Ferrariho vzorec**. Tento postup objevil v roce 1540 **Ludovico Ferrari** (1522 – 1565) žák Gerolama Cardana. Jeho uveřejnění se uskutečnilo v roce 1545 ve spise **Ars Magna**, stejně jako řešení kubické rovnice pomocí Cardanova vzorce. (Livio 2008, str. 78, 79)

Odvození: Nechť $a, b, c, d, e \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. Obecný předpis kvartické rovnice s neznámou *x* vypadá takto:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Pro další postup je opět nutný normovaný tvar, jehož se dosáhne vydělením koeficientem *a* kvartického členu:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

Substitucí $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, $r = \frac{d}{a}$, $s = \frac{e}{a}$ se rovnice zjednoduší na:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

V dalším kroku je třeba se zbavit kubického členu. Toho se docílí substitucí $y = x + \frac{p}{4}$, tedy $x = y - \frac{p}{4}$, kde *y* je neznámá:

$$\left(y - \frac{p}{4}\right)^4 + p \cdot \left(y - \frac{p}{4}\right)^3 + q \cdot \left(y - \frac{p}{4}\right)^2 + r \cdot \left(y - \frac{p}{4}\right) + s = 0$$

$$y^4 - py^3 + \frac{3p^2}{8}y^2 - \frac{p^3}{16}y + \frac{p^4}{256} + py^3 - \frac{3p^2}{4}y^2 + \frac{3p^3}{16}y - \frac{p^4}{64} + qy^2 - \frac{pq}{2}y + \frac{p^2q}{16} + ry - \frac{pr}{4} + s = 0$$

$$y^4 + \left(-\frac{3p^2}{8} + q\right)y^2 + \left(\frac{p^3}{8} - \frac{pq}{2} + r\right)y + \left(-\frac{3p^4}{256} + \frac{p^2q}{16} - \frac{pr}{4} + s\right) = 0$$

Pro složitě vypadající koeficienty zavedu substituci: $k = -\frac{3p^2}{8} + q$ pro kvadratický člen[5], $l = \frac{p^3}{8} - \frac{pq}{2} + r$ pro lineární člen[6], $m = -\frac{3p^4}{256} + \frac{p^2q}{16} - \frac{pr}{4} + s$ pro absolutní člen. Tím se rovnice znatelně zjednoduší:

$$\boxed{y^4 + ky^2 + ly + m = 0}$$

---

[5] (Stewart, 2004, str. 11): při odvozování vzorců s jiným značením chybně uvedena hodnota *k* ve tvaru ekvivalentním s: $k = -\frac{3p}{8} + q$

[6] (Stewart, 2004, str. 11): při odvozování vzorců s jiným značením chybně uvedena hodnota *l* ve tvaru ekvivalentním s: $l = \frac{p^2}{4} - \frac{pq}{2} + r$

Z tohoto tvaru rovnice je Ferrariho vzorec původně odvozen. Pokračuje se doplněním na čtverec podle kvartického a kvadratického členu:

$$y^4 + ky^2 + \frac{k^2}{4} = -ly - m + \frac{k^2}{4}$$

$$\left(y^2 + \frac{k}{2}\right)^2 = -ly - m + \frac{k^2}{4} \tag{8}$$

Následně Ferrari zavádí pomocnou neznámou $u$ tak, aby čtverec na levé straně rovnice zůstal zachován, konkrétně ve tvaru $\left(y^2 + \frac{k}{2} + u\right)^2$. Umocněním dostávám:

$$\left(y^2 + \frac{k}{2} + u\right)^2 = \left(y^2 + \frac{k}{2}\right)^2 + 2u \cdot \left(y^2 + \frac{k}{2}\right) + u^2$$

Nahrazením dle (8) a roznásobením na pravé straně vyjde:[7]

$$\left(y^2 + \frac{k}{2} + u\right)^2 = -ly - m + \frac{k^2}{4} + 2uy^2 + ku + u^2 \tag{9}$$

Nyní je třeba převést pravou stranu rovnice na čtverec pro neznámou $y$. Dosáhnu toho pomocí vzorce $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, kde $a^2 = 2uy^2$, $-2ab = -ly$; potom $a = \sqrt{2u} \cdot y$, $b = \frac{l}{2\sqrt{2u}}$, a tedy $b^2 = \frac{l^2}{8u}$, takže:

$$-m + \frac{k^2}{4} + ku + u^2 = \frac{l^2}{8u}$$

Vynásobením výrazem $8u$ vyjde kubická rovnice[8] (takzvaná kubická rezolventa)

$$8u^3 + 8ku^2 + \left(2k^2 - 8m\right) \cdot u - l^2 = 0 \tag{10}$$

s neznámou $u$, kterou je možno nalézt použitím Cardanova vzorce.

---

[7] (Stewart, 2004, str. 11): při odvozování vzorců s jiným značením chybně uvedena hodnota $\left(y^2 + \frac{k}{2} + u\right)^2 = -ly - m + \frac{k^2}{4} + 2uy + ku + u^2$

[8] (Stewart, 2004, str. 11): při odvozování vzorců s jiným značením chybně uvedena hodnota $8u^3 + 8ku^2 + (2k - 8m) \cdot u - l^2 = 0$

Pak se postupuje výpočtem *y*:

$$\left(y^2+\frac{k}{2}+u\right)^2=\left(\sqrt{2u}\cdot y-\frac{l}{2\sqrt{2u}}\right)^2$$

$$y^2+\frac{k}{2}+u=\pm\left(\sqrt{2u}\cdot y-\frac{l}{2\sqrt{2u}}\right)$$

$$\boxed{y^2\mp\sqrt{2u}\cdot y+\frac{k}{2}+u\pm\frac{l}{2\sqrt{2u}}=0} \qquad (11)$$

Výsledná rovnice je kvadratická (nazývaná také kvadratická rezolventa), a proto nalezení kořenů pro neznámou *y* již není složité. Nakonec se substitucí $y=x+\frac{p}{4}$ převede neznámá zpět na *x*. Přesné vyjádření zde z důvodu jeho složitosti uvádět nebudu. Postup představím v následující úloze.

**Úloha 2**: Vyřešte rovnici $y^4+6y^2-60y+36=0$ nad **C**.

Rovnice již je v normovaném tvaru a bez kubického členu, tedy ve tvaru $y^4+ky^2+ly+m=0$, kde hodnoty koeficientů jsou: $k=6$, $l=-60$ a $m=36$. Jejich dosazením do vzorce (8) vychází:

$$\left(y^2+3\right)^2=60y-27$$

Nyní se zavede pomocná neznámá *u* pomocí vzorce (9):

$$\left(y^2+3+u\right)^2=2uy^2+60y-27+6u+u^2$$

Neznámá *u* se vypočítá dosazením do vzorce (10)

$$8u^3+48u^2-216u-3600=0$$

$$u^3+6u^2-27u-450=0$$

a použitím Cardanova vzorce $u=-\frac{p}{3}+\sqrt[3]{-\frac{l}{2}+\sqrt{\frac{l^2}{4}+\frac{k^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{l}{2}-\sqrt{\frac{l^2}{4}+\frac{k^3}{27}}}$, kde $p=6$, $k=-39$, $l=-380$:

$$u=-2+\sqrt[3]{190+\sqrt{36100-2197}}+\sqrt[3]{190-\sqrt{36100-2197}}$$

$$u = -2 + \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}}$$

$$u \doteq -2 + \sqrt[3]{190 + 184{,}13} + \sqrt[3]{190 - 184{,}13}$$

$$u \doteq -2 + \sqrt[3]{374{,}13} + \sqrt[3]{5{,}87}$$

$$u \doteq -2 + 7{,}206 + 1{,}804$$

$$\underline{\underline{u \doteq 7{,}01}}$$

Konečně $y$ se vypočítá podle vzorce (11):

$$y^2 \mp \sqrt{14{,}02} \cdot y + 10{,}01 \mp \frac{30}{\sqrt{14{,}02}} \doteq 0$$

$$y^2 \mp 3{,}744y + 10{,}01 \mp \frac{30}{3{,}744} \doteq 0$$

$$y^2 \mp 3{,}744y + 10{,}01 \mp 8{,}013 \doteq 0$$

Z tohoto vztahu vycházejí dvě kvadratické rovnice, jejichž řešení již je jednoduché:

$$1)\ \ y^2 - 3{,}744y + 1{,}997 \doteq 0$$

$$y_1 \doteq \frac{3{,}744 + \sqrt{6{,}03}}{2} \doteq \frac{3{,}744 + 2{,}456}{2} = \frac{6{,}2}{2} = \underline{\underline{3{,}1}}$$

$$y_2 \doteq \frac{3{,}744 - \sqrt{6{,}03}}{2} \doteq \frac{3{,}744 - 2{,}456}{2} = \frac{1{,}288}{2} = \underline{\underline{0{,}644}}$$

$$2)\ \ y^2 + 3{,}744y + 18{,}023 \doteq 0$$

$$y_3 \doteq \frac{-3{,}744 + \sqrt{-58{,}074}}{2} \doteq \frac{-3{,}744 + 7{,}621\mathrm{i}}{2} \doteq \underline{\underline{-1{,}872 + 3{,}81\mathrm{i}}}$$

$$y_4 \doteq \frac{-3{,}744 - \sqrt{-58{,}074}}{2} \doteq \frac{-3{,}744 - 7{,}621\mathrm{i}}{2} \doteq \underline{\underline{-1{,}872 - 3{,}81\mathrm{i}}}$$

Kořeny rovnice $y^4 + 6y^2 - 60y + 36 = 0$ nad tělesem **C** tedy jsou:

$$y_1 \doteq 3{,}1; \quad y_2 \doteq 0{,}644; \quad y_3 \doteq -1{,}872 + 3{,}81\mathrm{i}; \quad y_4 \doteq -1{,}872 - 3{,}81\mathrm{i}.$$

# 3 Galoisova teorie

V tomto oddíle se budu snažit ukázat základní teorii, z níž obecně plyne neřešitelnost rovnic pátého stupně pomocí radikálů. Jelikož Galoisova teorie je z mého pohledu velmi složitá, uvedu proto hlavní definice a věty, jejichž aplikaci se pokusím ukázat na příkladech.

Pokud není uvedeno jinak, čerpám poučky a příklady ze skript Galoisova teorie od Davida Stanovského, kde je rovněž možno nalézt důkazy použitých tvrzení.

## 3.1 Náčrt teorie rozšiřování číselných těles

**Definice 1**: Buď $\mathrm{S} \geq \mathrm{T}$ rozšíření těles a polynom $f \in \mathrm{T}[x]$. Řekneme, že S je <u>kořenové nadtěleso</u> polynomu $f$ nad T, pokud má polynom $f$ v tělese S kořen $a$ a navíc $\mathrm{S} = \mathrm{T}(a)$.

**Definice 2**: Buď $\mathrm{S} \geq \mathrm{T}$ rozšíření těles a polynom $f \in \mathrm{T}[x]$. Řekneme, že S je <u>rozkladové nadtěleso</u> polynomu $f$ nad T, pokud se polynom $f$ rozkládá v $\mathrm{S}[x]$ na lineární činitele, tj. $f(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$ pro nějaká $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{S}$, a navíc $\mathrm{S} = \mathrm{T}(a_1, \ldots, a_n)$.

**Lemma 1**: Buď T těleso a polynom $f \in \mathrm{T}[x]$ stupně $\geq 1$. Pak existuje kořenové nadtěleso polynomu $f$ nad T.

**Věta 2**: Buď T těleso a polynom $f \in \mathrm{T}[x]$ stupně $\geq 1$. Pak existuje rozkladové nadtěleso polynomu $f$ nad T.

**Úloha 3**: Je dán polynom $f(x) = x^2 + 1$ nad tělesem **Q**. Určete jeho kořenová nadtělesa, rozkladové nadtěleso a rozklad na lineární činitele.

Polynom $f$ je nad tělesem **Q** ireducibilní. Výpočet jeho kořenů je snadný:

$$x^2 = -1$$

$$x_{1,2} = \pm \mathrm{i}$$

Oba kořeny jsou obsaženy v jednom <u>kořenovém nadtělese</u> $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$. Pro toto nadtěleso platí $\mathbf{Q}(\mathrm{i}) = \{p + q\mathrm{i};\ p, q \in \mathbf{Q}\}$. Kořeny polynomu $f$ dostaneme volbou $p = 0$

a $q = \pm 1$. Jelikož nadtěleso $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$ obsahuje oba kořeny, je zároveň rozkladovým nadtělesem polynomu *f*, který je potom možno rozložit jako $f(x) = (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i})$.

**Úloha 4**: Je dán polynom $g(x) = x^3 - 5$ nad tělesem **Q**. Určete jeho kořenová nadtělesa, rozkladové nadtěleso a rozklad na lineární činitele.

Polynom *g* je nad tělesem **Q** ireducibilní. Jeho kořeny se vypočítají takto:

$$x^3 = 5$$

$$x_k = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \text{ kde } k = 0, 1, 2$$

Potom:

$$x_0 = \sqrt[3]{5}(\cos 0 + \mathrm{i}\cdot\sin 0) = \sqrt[3]{5},$$

$$x_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right),$$

$$x_2 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right).$$

Kořen $x_0$ je obsažen v kořenovém nadtělese $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{5})$, kořeny $x_1$ a $x_2$ jsou prvky kořenového nadtělesa $\mathbf{Q}\left(\sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right)$; polynom *g* má tedy dvě kořenová nadtělesa. Rozkladovým nadtělesem potom bude $\mathbf{Q}\left(\sqrt[3]{5}; \sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right)$ a rozklad polynomu $g(x) = \left(x - \sqrt[3]{5}\right)\left(x - \sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right)\left(x - \sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right)$.

**Úloha 5**: Je dán polynom $h(x) = x^4 - 5x^2 + 6$ nad tělesem **Q**. Určete jeho kořenová nadtělesa, rozkladové nadtěleso a rozklad na lineární činitele.

Polynom *h* nad tělesem **Q** není ireducibilní, lze ho rozložit na $h(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$. Odtud jsou vidět jeho kořeny $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. Kořeny $x_1$ a $x_2$ jsou obsaženy v kořenovém nadtělese $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, zatímco $x_3$ a $x_4$ v $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$. Rozkladovým nadtělesem polynomu *h* je potom $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, kde se rozkládá na lineární činitele: $g(x)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

**Definice 3**: Buď $\mathrm{U} \geq \mathrm{T}$, $\mathrm{V} \geq \mathrm{T}$ rozšíření těles. Pod pojmem T-izomorfismus se rozumí takový izomorfismus U → V, jehož restrikce na množinu T je identita. (Stanovský 2010, str. 142)

**Lemma 3**: Buď T těleso, $f \in \mathrm{T}[x]$ ireducibilní polynom a $\mathrm{S}_1$, $\mathrm{S}_2$ kořenová nadtělesa polynomu *f* nad T. Pak existuje T-izomorfismus $\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2$.

**Věta 4**: Buď T těleso a polynom $f \in \mathrm{T}[x]$ stupně ≥ 1. Pak každá dvě rozkladová nadtělesa polynomu *f* nad T jsou T-izomorfní.

**Návrat k úloze 4**: Kořenovými nadtělesy polynomu $h(x)=x^4-5x^2+6$ jsou $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\mathrm{S}_1$ a $\mathbf{Q}(\sqrt{3})=\mathrm{S}_2$. Potom **Q**-izomorfismem $\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2$ je identita $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$.

**Poznámka**: Rozšíření U tělesa T nazýváme algebraickým rozšířením, jestliže každý prvek tělesa U je algebraickým prvkem nad tělesem T, to jest je kořenem nějakého polynomu z $\mathrm{T}[x]$.

**Definice 4**: Těleso T se nazývá algebraicky uzavřené, jestliže má každý polynom z $\mathrm{T}[x]$ stupně ≥ 1 v tělese T kořen.

**Příklad 6**: V algebraicky uzavřeném tělese se každý polynom rozkládá na lineární činitele. Příkladem takového tělesa je dle základní věty algebry těleso **C** všech komplexních čísel.

**Definice 5**: Řekneme, že $\mathrm{S} \geq \mathrm{T}$ je algebraický uzávěr tělesa T, pokud je S algebraicky uzavřené těleso a zároveň je algebraickým rozšířením tělesa T.

**Definice 6**: Považujme nadtěleso $\mathrm{S} \geq \mathrm{T}$ za vektorový prostor nad tělesem T. Značí se $\mathrm{S}_\mathrm{T}$. Jeho dimenze se nazývá stupeň rozšíření $\mathrm{S} \geq \mathrm{T}$ a značí se $[\mathrm{S}/\mathrm{T}]=\dim \mathrm{S}_\mathrm{T}$. (Stanovský 2010, str. 134)

**Příklad 7**: Algebraickým uzávěrem tělesa **R** je těleso **C**; platí $\mathbf{C}=\mathbf{R}(\mathrm{i})$. Báze prostoru $\mathbf{C}_\mathbf{R}$ je například $\{1;\mathrm{i}\}$, potom stupeň rozšíření $[\mathbf{C}/\mathbf{R}]=\dim \mathbf{C}_\mathbf{R}=2$.

**Lemma 5**: Ke každému tělesu T existuje rozšíření $S \geq T$ takové, že každý polynom z $T[x]$ má v S kořen.

**Věta 6**: Ke každému tělesu T existuje algebraický uzávěr. Každé dva algebraické uzávěry tělesa T jsou T-izomorfní.

## 3.2 Galoisovy grupy

**Definice 7**: Buď $S \geq T$ rozšíření těles. Izomorfismy $\varphi : S \to S$ splňující $\varphi(x) = x$ pro každé $x \in T$ nazveme T-automorfismy tělesa S.

**Definice 8**: Buď $S \geq T$ rozšíření těles. Všechny T-automorfismy tělesa S tvoří podgrupu symetrické grupy na množině S. Tato grupa se nazývá Galoisova grupa rozšíření $S \geq T$ a značí se $\mathbf{Gal}(S/T)$.

**Lemma 7**: Buď $S \geq T$ rozšíření těles, $f \in T[x]$ a *A* množina všech kořenů polynomu *f* v S. Pak pro každé $\varphi \in \mathbf{Gal}(S/T)$ je $\varphi|_A$ permutací množiny *A*.

**Úloha 8**: Spočtete prvky grupy $\mathbf{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$.

Každý **R**-automorfismus $\varphi$ tělesa **C** je určen hodnotou $\varphi(\mathrm{i})$ a permutuje kořeny polynomu $x^2 + 1$. Přípustné jsou tedy dvě možnosti: $\varphi(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ nebo $\varphi(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$.

1) $\varphi(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$

Potom zobrazení $\varphi(a + b\mathrm{i}) = \varphi(a) + \varphi(b)\varphi(\mathrm{i}) = a + b\mathrm{i}$, tedy jedná se o identitu.

2) $\varphi(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$

Pak zobrazení $\varphi(a + b\mathrm{i}) = \varphi(a) + \varphi(b)\varphi(\mathrm{i}) = a - b\mathrm{i}$, jde tedy o komplexní sdružení.

Grupa $\mathbf{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ tedy obsahuje identitu a komplexní sdružení, tudíž je dvouprvková. Zároveň je izomorfní grupě $\mathbf{Z}_2$.

**Příklad 9**: Znázornění izomorfismu $\mathbf{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \cong \mathbf{Z}_2$.

Tabulka grupy $\mathbf{Z}_2$ s operací sčítání vypadá tímto způsobem:

| · | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 |
| **1** | 1 | 0 |

Grupa $\mathbf{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ s operací skládání, kde **id** je identita a **ks** komplexní sdružení, vypadá takto:

| $\circ$ | **id** | **ks** |
|---|---|---|
| **id** | id | ks |
| **ks** | ks | id |

Srovnáním tabulek je vidět, že mají tutéž strukturu; uplatňují se shody 0 ↔ id, 1 ↔ ks. Právě proto jsou grupy $\mathbf{Z}_2$ a $\mathbf{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ izomorfní.

## 3.3 Neřešitelnost polynomů stupně 5 a více

**Tvrzení 8**: Buď T těleso charakteristiky 0 a S rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - 1$ nad T. Pak $\mathbf{Gal}(\mathrm{S}/\mathrm{T})$ je abelovská (komutativní) grupa.

**Poznámka**: Charakteristikou tělesa rozumíme nejmenší $n \in \mathbf{N}$, pro které $n \cdot 1 = 0$. Potom říkáme, že charakteristika tělesa je *n*. Jestliže takové přirozené číslo neexistuje, je těleso charakteristiky 0; například **Q**, **R** a **C**. (Bečvář 2010, str. 25 – 26)

**Tvrzení 9**: Buď S rozkladové nadtěleso nějakého polynomu nad tělesem T a buď $g \in \mathrm{T}[x]$ ireducibilní polynom. Pokud má polynom *g* v tělese S nějaký kořen, pak se nad tělesem S rozkládá na lineární činitele.

### 3.3.1 Řešitelnost grup

**Definice 9**: Grupa G se nazývá řešitelná, pokud existuje číslo *k* a normální podgrupy $\mathrm{N}_0, ..., \mathrm{N}_k \leq \mathrm{G}$ takové, že $\{1\} = \mathrm{N}_0 \subseteq \mathrm{N}_1 \subseteq ... \subseteq \mathrm{N}_k = \mathrm{G}$ a každá faktorgrupa $\mathrm{N}_i / \mathrm{N}_{i-1}$, $i = 1,...,k$, je abelovská. Číslu *k* se říká stupeň řešitelnosti.

**Příklad 10**: Symetrická grupa $\mathbf{S}_3$ obsahuje $3! = 6$ prvků, jimiž jsou:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Tyto permutace jsou po řadě: sudá, lichá, lichá, sudá, sudá, lichá. Potom alternující grupa $\mathbf{A}_3$ má $6 : 2 = 3$ prvky, kterými jsou sudé permutace symetrické grupy $\mathbf{S}_3$, konkrétně:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$ (Bečvář 2010, str. 52 – 55)

**Příklad 11**: Řešitelnost grup $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$ a $\mathbf{S}_5$.

1) Grupa $\mathbf{S}_3$ je řešitelná stupně 2, protože její řada podgrup je $\{1\} \subseteq \mathbf{A}_3 \subseteq \mathbf{S}_3$. Obě faktorgrupy $\mathbf{A}_3 / \{1\} = \mathbf{A}_3 \cong \mathbf{Z}_3$, $\mathbf{S}_3 / \mathbf{A}_3 \cong \mathbf{Z}_2$ jsou abelovské.

2) Grupa $\mathbf{S}_4$ je řešitelná stupně 3, neboť její řada podgrup je $\{1\} \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{A}_4 \subseteq \mathbf{S}_4$, kde $\mathbf{K}$ je takzvaná Kleinova čtyřgrupa, nejmenší necyklická grupa, nazývaná též grupa matrace. Platí $\mathbf{K} \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, $[\mathbf{A}_3 / \mathbf{K}] = 12/4 = 3$, $\mathbf{S}_4 / \mathbf{A}_4 \cong \mathbf{Z}_2$, takže všechny faktorgrupy jsou abelovské.

3) Grupa $\mathbf{S}_5$ není řešitelná! Jedinou vlastní podgrupou této grupy je $\mathbf{A}_5$. Řada podgrup potom je $\{1\} \subseteq \mathbf{A}_5 \subseteq \mathbf{S}_5$, nicméně $\mathbf{A}_5$ není abelovská. Právě tuto myšlenku si jako první uvědomil **Évariste Galois**.

**Lemma 10**: Buď G grupa. Pak G je řešitelná právě tehdy, když existuje $\mathrm{N} \leq \mathrm{G}$ taková, že obě grupy N, $\mathrm{G}/\mathrm{N}$ jsou řešitelné.

**Příklad 12**: Grupy $\mathbf{S}_n$ pro $n \geq 5$ nejsou řešitelné, protože obsahují podgrupu $\mathbf{S}_5$, která, dle příkladu 11, není řešitelná.

**Důsledek 11**: Buď G grupa a předpokládejme, že existuje číslo $k$ a normální podgrupy $\mathrm{N}_0, \ldots, \mathrm{N}_k \leq \mathrm{G}$ takové, že $\{1\} = \mathrm{N}_0 \subseteq \mathrm{N}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{N}_k = \mathrm{G}$ a každá faktorgrupa $\mathrm{N}_i / \mathrm{N}_{i-1}$, $i = 1, \ldots, k$, je řešitelná. Pak G je řešitelná.

### 3.3.2 Řešitelnost polynomů v radikálech

**Definice 10**: Buď $\mathrm{S} \geq \mathrm{T}$ rozšíření těles a $a \in \mathrm{S}$. Řekneme, že prvek $a$ je <u>vyjádřitelný v radikálech</u> nad tělesem T, pokud jej lze zapsat za pomoci prvků tělesa T, operaci $+, -, \cdot, /$ a $n$-tých odmocnin.

**Definice 11**: Buď T těleso a $f$ polynom z $\mathrm{T}[x]$. Řekneme, že polynom $f$ je <u>řešitelný v radikálech</u> nad tělesem T, pokud je každý kořen rovnice $f = 0$ vyjádřitelný v radikálech nad T.

**Lemma 12**: Buď T těleso charakteristiky 0 a $\mathrm{U} \geq \mathrm{S} \geq \mathrm{T}$ rozšíření těles taková, že S je rozkladové naděleso nějakého polynomu nad T a U je rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - a \in \mathrm{S}[x]$ nad S. Pak existuje rozšíření $\mathrm{U} \geq \mathrm{V}$ takové, že V je rozkladové naděleso nějakého polynomu nad T a $\mathbf{Gal}(\mathrm{V}/\mathrm{S})$ je řešitelná grupa.

**Věta 13** (**Galoisova věta**): Buď T těleso charakteristiky 0, *f* polynom z $\mathrm{T}[x]$ a S rozkladové nadtěleso polynomu *f* nad T. Polynom *f* je řešitelný v radikálech právě tehdy, když je grupa $\mathbf{Gal}(\mathrm{S}/\mathrm{T})$ řešitelná.

**Poznámka**: Eisensteinovo kritérium: Nechť $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ je polynom stupně *n* nad **Z**. Předpokládejme, že existuje prvočíslo *q* takové, že:

1) $q \nmid a_n$

2) $q \mid a_i$, kde $i = 0, ..., n-1$

3) $q^2 \nmid a_0$

Potom *f* je ireducibilní nad **Q**. (Stewart 2004, str. 40 – 41)

**Tvrzení 14**: Buď *p* prvočíslo a uvažujme ireducibilní polynom $f \in \mathbf{Q}[x]$ stupně *p*, který má $p-2$ reálných a 2 imaginární kořeny. Buď S rozkladové nadtěleso polynomu *f* nad **Q**. Pak $\mathbf{Gal}(\mathrm{S}/\mathbf{Q}) \cong \mathbf{S}_p$.

**Příklad 13**: Nejjednodušším příkladem takového polynomu je $f(x) = x^5 - 2rx + r$ nad tělesem **Q**, kde *r* je prvočíslo. Jeho stupeň je $p = 5$.

Pro $r = 2$ vypadá polynom takto: $f(x) = x^5 - 4x + 2$. Jeho ireducibilita se dá zjistit pomocí Eisensteinova kritéria, kde pro jednotlivé koeficienty platí:

$$a_0 = 2,\ a_1 = -4,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ a_5 = 1.$$

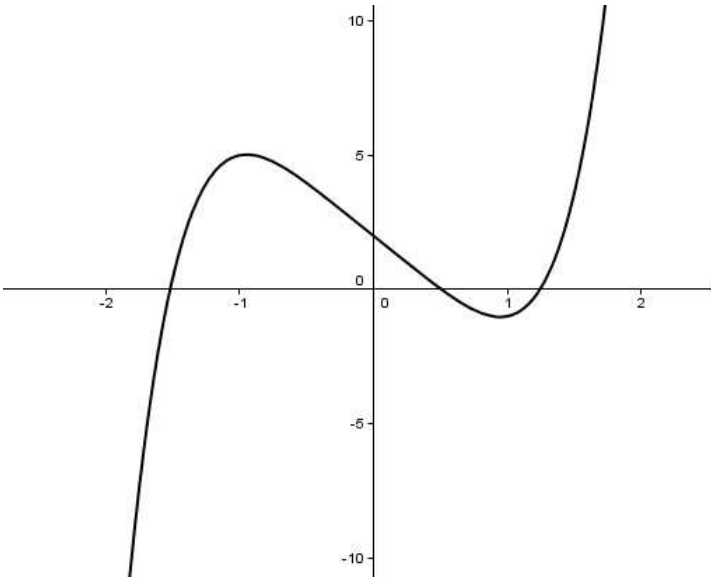
Při volbě $q = 2$ jsou splněny všechny podmínky:

$$q \nmid a_5 \equiv 2 \nmid 1, \qquad q \mid a_4 \equiv 2 \mid 0, \qquad q \mid a_3 \equiv 2 \mid 0, \qquad q \mid a_2 \equiv 2 \mid 0,$$

$$q \mid a_1 \equiv 2 \mid -4, \qquad q \mid a_0 \equiv 2 \mid 2, \qquad q^2 \nmid a_0 \equiv 4 \nmid 2,$$

takže polynom $x^5 - 4x + 2$ je nerozložitelný nad **Q**.

Skutečnost, že má tři reálné kořeny, je vidět z grafu funkce $f(x) = x^5 - 4x + 2$:




**Obrázek 1**: Graf funkce $f(x) = x^5 - 4x + 2$
(Zdroj: program GeoGebra 4.2)

Galoisova grupa rozkladového nadtělesa polynomu *f* je tedy izomorfní s $\mathbf{S}_5$, což je neřešitelná grupa.

**Důsledek 15** (**Abel-Ruffiniho věta**): Existují racionální polynomy stupně 5 a více, které nejsou řešitelné v radikálech nad tělesem **Q**.

# Závěr

Životopis Évarista Galoise se podařilo obsáhnout velmi podrobně. Prostudovaná literatura poskytuje mnoho užitečných informací, z nichž se dá hojně čerpat. Jednotlivé životní události jsou často doplněny autentickými texty z korespondence, úryvky z knih či zápisky z deníků. Informace uvedené v jednotlivých knihách se však mnohdy rozcházejí, a to zejména u románu Vyvolenci bohů. Tam jsou například do podrobností popsány historicky nepodložené události související s Galoisovou nešťastnou láskou, vyzváním na souboj a se samotným soubojem. Navíc jména aktérů souboje nesouhlasí s autentickými dokumenty uvedenými v ostatní literatuře.

V části o řešení polynomických rovnic pomocí vzorců se mi vytýčený cíl rovněž podařilo splnit úplně. Všechny postupy jsou popsány natolik srozumitelně, že je možno je využít na střední škole v rozšířené výuce matematiky nebo pro zvídavé studenty.

Přes veškeré vynaložené úsilí se mi ve třetí části práce nepodařilo proniknout do Galoisovy teorie tak dobře, jak bych si představoval, protože je pro mě příliš abstraktní. Její pojetí v obsáhlé knize od Iana Stewarta mi přišlo příliš složité, rozhodl jsem se proto vyjít z textu od Davida Stanovského. Potřebné teoretické poučky se mi vypsat podařilo, nicméně všechny pojmy a zákonitosti nejsou popsány tak dobře nebo podrobně, jak by bylo záhodno.

Myslím si, že z pohledu učitelství matematiky pro střední školy není potřeba do Galoisovy teorie pronikat hlouběji, je však žádoucí zde probranou teorii vysvětlit na více příkladech. K tomu by mohlo pomoci vytvoření sbírky řešených příkladů, která by se mohla stát rozšířením této práce.

Zpracování tématu řešitelnosti polynomických rovnic pomocí vzorců mě obohatilo velkou měrou, hlavně odvození Cardanova vzorce pro kubické rovnice a dozvědění se o existenci Ferrariho vzorce pro rovnice čtvrtého stupně. Životopis Évarista Galoise mě značně zaujal, zatímco jeho abstraktní teorie mi zůstala i nadále trochu skrytá.

# Seznam použité literatury

BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. 4. vyd. Praha: Matfyzpress, 2010, 435 s. ISBN 978-80-7378-135-4.

INFELD, Leopold. *Vyvolenci bohů*. Praha: Mír, 1952, 276 s.

LIVIO, Mario. *Neřešitelná rovnice: matematika a jazyk symetrií*. 1. vyd. v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2008, 318 s. ISBN 978-80-7363-150-5.

STANOVSKÝ, David. *Galoisova teorie*. Praha. 14 s. [cit. 17. března 2014] Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~stanovsk/vyuka/algebra/galois.pdf

STANOVSKÝ, David. *Základy algebry*. 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2010, 153 s. ISBN 978-80-7378-105-7.

STEWART, Ian. *Galois Theory*. 3. vyd. United States of America: Chapman & Hall/CRC, 2004, 328 s. ISBN 1-58488-393-6.

TOTI RIGATELLI, Laura. *Évariste Galois: 1811 – 1832 (Vita mathematica, Vol. 11)*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1996, 168 s. ISBN 3-7643-5410-0.

# Seznam obrázků